

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2018.03.07

摄动函数高阶展开与长期共振

王文磊^{1,2,3}, 许雪晴^{1,2}, 周永宏^{1,2,3}, 廖新浩^{1,2}

(1. 中国科学院 上海天文台, 上海 200030; 2. 中国科学院 行星科学重点实验室, 上海 200030; 3. 中国科学院大学 天文与空间科学学院, 北京 100049)

摘要: 研究三体系统的长期共振效应, 有助于了解系统的稳定性。在雅可比坐标系下建立了第三体摄动一般运动模型, 将摄动函数按照半长径之比展开到十六极矩。通过对摄动函数进行轨道双重平均, 消除了内外轨道的短周期项。基于限制性三体模型, 分别在内摄和外摄两类情形下进行讨论。外摄情形下十六极矩项对系统结构的演化只有微弱的影响, 而内摄情形下系统会出现新的共振和混沌现象。在圆型内摄情形下, 系统出现了类似于 Lidov-Kozai 效应的近点共振。区别于 Lidov-Kozai 效应只在近心点幅角 $\omega_2 = \pm 90^\circ$ 时可能存在平衡点, 十六极矩近似下, 在 ω_2 为 0° 和 180° 时也可能存在平衡点。角动量 Z 轴分量的取值会影响共振平衡点的数量、位置和稳定性。在椭圆型内摄情形下, 系统在十六极矩近似下激发出新的轨道翻转, 且翻转没有周期性, 呈现混沌现象。十六极矩近似下的轨道翻转明显区别于八极矩近似下的轨道翻转, 特别是, 当半长径之比相当大时, 十六极矩近似下偏心率的振幅明显大于八极矩近似下偏心率的振幅。

关键词: 天体力学; 长期摄动; 轨道演化; 十六极矩

中图分类号: P133 **文献标识码:** A

1 引 言

在天体轨道运动中, 当两个或两个以上在轨道上运行的天体的运动周期或频率接近简单整数比 (即通约) 时, 天体的轨道会出现共振现象, 这种现象通常称为轨道共振。由于天体运动周期的性质不同, 轨道共振又分为平运动共振、轨旋共振和长期共振等, 它们分别对应于两个天体轨道平运动周期通约、一个天体平运动周期与其自转周期通约、由摄动引起的天体轨道大振幅长周期变化等。长期共振主要有四种类型: 近点联线共振、交点联线共振、近点共振和交点共振, 其对应的共振角分别为 $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$, $\Omega - \Omega'$, ω 和 Ω , 其中, ω 表示受摄天体的近心点幅角, $\tilde{\omega}$ 和 Ω 分别表示受摄天体的近心点经度和升交点经度, $\tilde{\omega}'$ 和 Ω' 则分别表示摄动天体的近心点经度和升交点经度。轨道长期共振主要由第三体摄动导致, 它广泛存在于实

收稿日期: 2018-02-07; 修回日期: 2018-04-23

资助项目: 国家自然科学基金 (11673053, 11773057, 11673049)

通讯作者: 王文磊, wangwl@shao.ac.cn

际天体系统中, 如太阳系中由 8 颗大行星对应的 8 个关于轨道偏心率的特征频率和 8 个关于轨道倾角的特征频率, 以及它们的某些线性组合, 对主带小行星的轨道偏心率和轨道倾角的长期变化有着显著影响^[1]。为了研究长期共振的动力学性态, 需要对第三体摄动函数进行分析展开, 以直观展现不同轨道参数和不同量级摄动对应的共振空间结构。因此, 摄动函数的展开是研究轨道长期共振的基础。

摄动函数展开主要有两种方法: 基于摄动体与受摄体相对于中心天体的距离比率 ρ 的勒让德多项式展开和基于平面圆轨道的空间非圆轨道根数的展开。它们有各自的特点。在长期共振研究中, 前一种方法适用于任意的偏心率和轨道倾角, 但只能展开到较低阶勒让德多项式, 或低阶极矩; 而用后一种方法可以展开到距离比率的高阶项, 但对轨道偏心率和轨道倾角只能展开到低阶项。一般情况下, 由于长期共振运动对应的轨道偏心率和轨道倾角均较大, 特别是近年来一些行星轨道迁移等热点天文动力学问题中, 对应的轨道偏心率可达 0.9, 甚至更大, 故本研究对摄动函数采用勒让德多项式展开, 即多极矩展开。

摄动体轨道在受摄体轨道外侧时的受摄二体问题通常被称为外摄问题, 反之则被称为内摄问题。对于外摄问题, 当摄动函数展开到四极矩时, 对于适当的轨道参数配置, 受摄体轨道会出现近点联线共振、交点联线共振以及近点共振。近点共振也称为 Lidov-Kozai 共振^[2-4], 即当初始条件满足 $\sqrt{1-e^2} \cos i < \sqrt{3/5}$ 时, 轨道将发生振荡^[5], 其中, e 是偏心率, i 为轨道倾角。考虑八极矩时, Lithwick 和 Naoz^[6]发现, 轨道在满足 Lidov-Kozai 共振等条件时会发生翻转, 即轨道在顺行 ($i < 90^\circ$) 与逆行 ($i > 90^\circ$) 间相互转换。Naoz 等人^[7]将该机制用于解释逆行系外行星的形成问题。Naoz 等人^[8]指出, 对于内摄问题, 当摄动函数展开到四极矩时, 仅存在交点共振; 考虑到八极矩时, 对于满足一定条件的轨道参数, 受摄体的轨道也会发生翻转。无论对于内摄还是外摄情况, 上述轨道翻转是非周期的, 呈现混沌状态^[9,10]。现有的研究表明, 当摄动函数由四极矩近似扩展到八极矩近似时, 轨道动力学结构的性质也随之发生一些本质上的改变。由此可见, 当受摄体与摄动体离开中心天体的距离相差不是特别大时, 对摄动函数进行更高阶展开是非常有必要的。

Laskar 和 Boué^[11]给出了新的适用于任意偏心率和倾角的行星摄动函数展开, 该展开式可在平面情形导出到 ρ^{10} 项, 在空间不变平面情形导出到 ρ^5 项, 在空间情形的固定参考架下导出到 ρ^3 项, 即八极矩。他们的展开是基于规范大天体中心坐标系, 该坐标系可以转换到雅可比坐标系上。Whipple 和 Shelus^[12]在研究木星的逆卫星木卫八的动力学过程中考虑了所有大行星的影响, 发现了锁定在木卫八的近木星点和木星的近日点之差的近点联线共振。

Yokoyama 等人^[13]在基于外摄条件研究木星的外卫星轨道稳定性的过程中考虑到了十六极矩。由于摄动体处于圆轨道, 且半长径之比约为 0.03, 因此, 他们指出, 十六极矩项不会对轨道演化产生显著影响。Clifford^[14]基于向量法把展开式从四极矩扩展到十六极矩, 阐述了高阶项和广义相对论效应对极端情形的效应, 指出十六极矩项在长期演化过程中只有微弱的效应。对于八极矩近似下轨道翻转的多数情形, 十六极矩近似下或相对论效应下的轨道演化明显区别于八极矩近似下的情形。对于内轨道天体等质量系统 (即 $m_0 = m_1$, 其中 m_0 为中心天体质量, m_1 为内轨道天体的质量), 八极矩项消失, 十六极矩项可以在某个参数区域产生轨道翻转或者大偏心率。Clifford 论文中的具体讨论均在内外轨道角动量之比远小于 1 的

情形下进行, 即外轨道的角动量占主导地位。其极端情形对应于内运动天体的质量可忽略不计, 这也是外摄的简化情形, 反之, 则是内摄的简化情形。为了方便分析十六极矩近似对系统动力学演化的贡献, 有必要分别在内外摄动情形下考察如下情形: 受摄体是无质量的试验粒子, 即限制性三体模型。

本文基于摄动函数勒让德展开方法, 在固定参考架下将摄动函数展开到十六极矩, 同时平均掉其中短周期项, 以用于长期共振动力学性态研究。第 2 章中, 我们基于雅可比坐标系下一般三体问题动力学模型, 在其中两个天体质量相对于中心天体质量均较小的条件下, 将摄动函数展开成任意阶多极矩形式, 且该展开式对内外摄两种情形具有统一的表达形式。此外, 在十六极矩近似下, 给出的展开后的摄动函数具体分析表达式, 可以直接用于外摄和内摄两种情形。在第 3 章, 研究了外摄情形下试验体的轨道长期共振性态, 发现十六极矩近似下的平衡点相对于四极矩的会有所偏移, 偏移量与半长径之比及摄动体质量有关。当摄动体处于椭圆型轨道时, 十六极矩项对八极矩近似激发的轨道翻转有抑制作用。在第 4 章, 研究了内摄情形下试验体的轨道长期共振性态, 发现十六极矩近似下摄动体处于圆轨道时将出现新的长期共振性态; 而摄动体处于椭圆轨道时, 十六极矩近似会激发出新的轨道翻转。最后, 给出了本文的主要结论, 并讨论了其可能的应用方向。

2 摄动函数的展开与平均化

如图 1 所示, 中心天体位于 O , 质量为 m_0 。另外两个天体的质量为 m_1 和 m_2 , 且满足 $m_1/m_0 \ll 1$ 和 $m_2/m_0 \ll 1$ 。 O' 是天体 m_0 和 m_1 的质心, \mathbf{r}_1 是天体 m_1 相对于天体 m_0 的位置向量, \mathbf{r}_2 是天体 m_2 相对于 O' 的位置向量。 ψ 是 \mathbf{r}_1 与 \mathbf{r}_2 的夹角, 且不失一般性, 并假定 $|\mathbf{r}_1| < |\mathbf{r}_2|$ 。相应的雅可比坐标系下运动方程为:

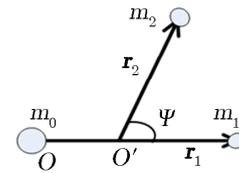


图 1 雅可比坐标系下三体问题示意图

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{k(m_0 + m_1)\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} + \frac{km_2(m_0 + m_1)}{m_1} \frac{\partial R^+}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{km_2(m_0 + m_1)}{m_0} \frac{\partial R^-}{\partial \mathbf{r}_1}, \quad (1)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{km_0(m_0 + m_1 + m_2)}{m_0 + m_1} \frac{\partial R^+}{\partial \mathbf{r}_2} + \frac{km_1(m_0 + m_1 + m_2)}{m_0 + m_1} \frac{\partial R^-}{\partial \mathbf{r}_2}, \quad (2)$$

其中, k 为引力常量, R^+ 和 R^- 定义如下:

$$\begin{cases} R^+ = \frac{1}{\left| \frac{m_1}{m_0 + m_1} \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \right|} \\ R^- = \frac{1}{\left| \frac{m_0}{m_0 + m_1} \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \right|} \end{cases}. \quad (3)$$

由于 $|\mathbf{r}_1| < |\mathbf{r}_2|$, 对式 (3) 进行勒让德级数展开可得:

$$\begin{cases} R^+ = \frac{1}{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{r_1}{r_2} \right)^n P_n(\cos \psi) \\ R^- = \frac{1}{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{m_0}{m_0 + m_1} \frac{r_1}{r_2} \right)^n P_n(\cos \psi) \end{cases}, \quad (4)$$

其中 $P_n(\cos \psi)$ 是 n 阶勒让德多项式。将式 (4) 代入式 (3)，化简式 (1) 和式 (2) 后可得：

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{k(m_0 + m_1)}{r_1^3} \mathbf{r}_1 + \frac{\partial R_1}{\partial \mathbf{r}_1}, \quad (5)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{k(m_0 + m_1 + m_2)}{r_2^3} \mathbf{r}_2 + \frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{r}_2}, \quad (6)$$

$$\begin{cases} R_1 = km_2 R \\ R_2 = \frac{km_0 m_1 (m_0 + m_1 + m_2)}{(m_0 + m_1)^2} R \end{cases}, \quad (7)$$

$$R = \frac{1}{r_2} \sum_{n=2}^N \alpha_n \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^n P_n(\cos \psi), \quad \alpha_n = \frac{(m_0)^{n-1} - (-m_1)^{n-1}}{(m_0 + m_1)^{n-1}}, \quad n \geq 2, \quad (8)$$

其中， R_1 和 R_2 分别是内外轨道的摄动函数， R 是两者的共同项， α_n 是质量因子， N 代表所取的最高阶数。当 $m_1 = 0$ 时， O' 与 O 重合，摄动函数形式与大天体中心坐标系下的摄动函数形式一致，此时为外摄情形；当 $m_2 = 0$ 时，相比于大天体中心坐标系下的摄动函数，摄动函数 R_2 没有一阶项，此时为内摄情形。利用勒让德多项式加法定理和球面三角公式^[15]，并展开到十六极矩项， R 的轨道根数表示形式为：

$$R = \sum_{n=2}^4 \alpha_n \frac{r_1^n}{r_2^{n+1}} \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{j'=0}^n F_{nmj}(i_1) F_{nmj'}(i_2) K_{nmjj'} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cdot \cos[m(\Omega_1 - \Omega_2) + (n-2j)(f_1 + \omega_1) - (n-2j')(f_2 + \omega_2)], \quad (9)$$

其中， $F_{nmj}(i)$ 是关于轨道倾角的函数， i 是轨道倾角， Ω 是升交点赤经， ω 是近心点幅角， f 是真近点角，下标 1, 2 分别对应 m_1 和 m_2 的轨道根数。在 $m = 0$ 时，它与经典的轨道倾角函数^[16,17] 在系数上存在细微的差别。 $K_{nmjj'}$ 则类似于克罗内克符号，具体定义是：

$$K_{nmjj'} = \begin{cases} 2 & (m \neq 0) \\ 1 & (n-2j=0, \text{ 且 } n-2j'=0; m=0) \\ 1/2 & (n-2j=0, \text{ 异或 } n-2j'=0; m=0) \\ 1/4 & (\text{其他}; m=0) \end{cases}. \quad (10)$$

为了研究第三体摄动问题的长期效应，需要对摄动函数分别在摄动体轨道周期和试验体轨道周期上对时间进行平均^[18]，即双周期平均，将快变量部分从摄动函数中分离出去。平均化后的摄动函数形式为：

$$\bar{R} = \sum_{n=2}^4 \alpha_n \frac{a_1^n}{a_2^{n+1}} \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{j'=0}^n F_{nmj}(i_1) F_{nmj'}(i_2) X_{n-2j}^n(e_1) X_{n-2j'}^{-(n+1)}(e_2) \cdot K_{nmjj'} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos[m(\Omega_1 - \Omega_2) + (n-2j)\omega_1 - (n-2j')\omega_2] , \quad (11)$$

其中, a 为轨道半长径, e 为轨道偏心率, $X_k^n(e)$ 定义为:

$$\begin{cases} X_k^n(e) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\left(\frac{r}{a} \right)^n \cos(kf) \right] dt \\ X_{-k}^n(e) = X_k^n(e) \end{cases} . \quad (12)$$

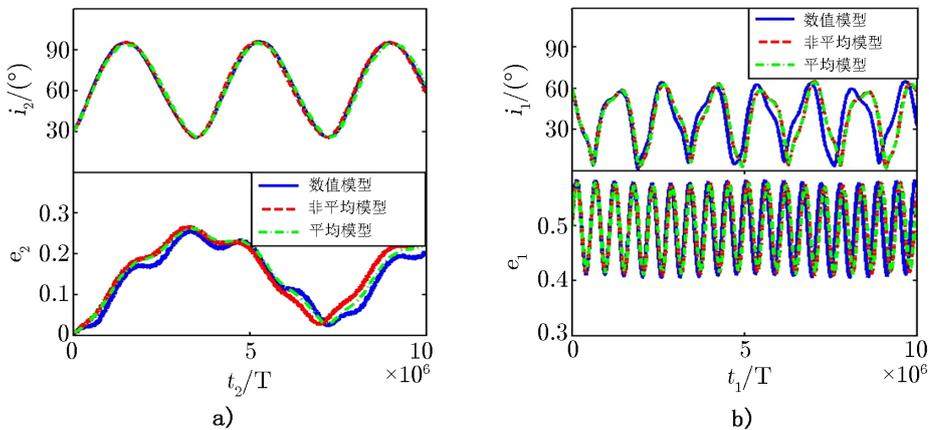
$X_k^n(e)$ 为简写的 Hansen 系数, 其中 T 为轨道周期, t 为时间。

取 Delaunay 共轭正则变量 L, l, G, g, H, h , 相关定义为: $L = \sqrt{\mu a}$, $G = L\sqrt{1-e^2}$, $H = G \cos i$, $l = M$, $g = \omega$, $h = \Omega$, M 为平近点角。对应的哈密顿函数为:

$$F_j = \frac{\mu_j^2}{2L_j^2} + \bar{R}_j, \quad j = 1, 2 . \quad (13)$$

上述哈密顿函数中包含的变量关系为 $F = F(L, G, H, g, h)$, 不显含 l , 故 L 为循环坐标。因此, 无论内摄还是外摄, 轨道半长径在长期效应下不发生变化。

为研究数值模型、非平均模型和平均模型间的差异, 分别对内外摄两类情况取一组轨道根数, 计算试验体轨道随时间的变化, 见图 2。为了计算方便和公式表达的简洁, 本文取太阳质量 M_\odot 为基本质量单位、太阳与地球之间的平均距离 (1 AU) 为基本长度单位。令引力常量 $k = 1$, 则相应的时间单位为 $T = \sqrt{\text{AU}^3/kM_\odot}$ 。



注: a) 内摄; b) 外摄。

图 2 十六极近似下数值模型、非平均模型和平均模型间的比较

设轨道初始值如下: $a_1 = 5 \text{ AU}$, $e_1 = 0.5$, $i_1 = 60^\circ$, $\Omega_1 = 20^\circ$, $\omega_1 = 30^\circ$, $M_1 = 5^\circ$, $a_2 = 15 \text{ AU}$, $e_2 = 0.01$, $i_2 = 30^\circ$, $\Omega_2 = 30^\circ$, $\omega_2 = 30^\circ$, $M_2 = 50^\circ$ 。图 2a) 是内摄情形, 3 个天

体的质量分别为 $m_0 = M_\odot$, $m_1 = 10^{-3} M_\odot$, $m_2 = 0$ 。图 2b) 是外摄情形, 3 个天体的质量分别为 $m_0 = M_\odot$, $m_1 = 0$, $m_2 = 10^{-3} M_\odot$ 。内摄情形下三个模型中试验体的偏心率和倾角演化趋势基本一致, 但存在一定的相位差异, 其中数值模型与非平均模型的差异主要与高阶截断项有关, 而非平均模型与平均模型的差异主要与双重平均方法有关。对于外摄情形, 也有类似的结果。

3 外摄情形下试验体的长期共振性态

当研究外摄情形时, 本文假设受摄体是试验体, 即 $m_1 = 0$, 因此, m_1 对外部天体的运动没有影响。外轨道的轨道半长径、偏心率、轨道倾角、升交点经度和近心点幅角都是常数。为了简化公式, 不妨取 $i_2 = 0^\circ$, $\omega_2 = 180^\circ$, $\Omega_2 = -180^\circ$ 。由式 (7) 和式 (11) 可得到外摄下相应的摄动函数:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = R_{12} + R_{13} + R_{14} \\ R_{12} = -\frac{m_2 a_1^2}{16 a_2^2} (1 - e_2^2)^{-\frac{3}{2}} [(3 \sin^2 i_1 - 2)(2 + 3e_1^2) - 15e_1^2 \sin^2 i_1 \cos 2\omega_1] \\ R_{13} = \frac{15m_2 a_1^3}{512 a_2^4} e_2 (1 - e_2^2)^{-\frac{5}{2}} \{ [(5 \sin^2 i_1 (1 + 3 \cos i_1) - 4(1 + \cos i_1)) \cos(\omega_1 + \Omega_1) + \\ (5 \sin^2 i_1 (1 - 3 \cos i_1) - 4(1 - \cos i_1)) \cos(\omega_1 - \Omega_1)] e_1 (4 + 3e_1^2) - \\ 35e_1^3 \sin^2 i_1 [(1 + \cos i_1) \cos(3\omega_1 + \Omega_1) + (1 - \cos i_1) \cos(3\omega_1 - \Omega_1)] \} \\ R_{14} = \frac{63m_2 a_1^4}{64 a_2^5} (1 - e_2^2)^{-\frac{7}{2}} \left[\left(\frac{35}{56} \sin^4 i_1 - \frac{5}{7} \sin^2 i_1 + \frac{1}{7} \right) \left(1 + 5e_1^2 + \frac{15}{8} e_1^4 \right) - \right. \\ \left. e_1^2 \sin^2 i_1 \left(\frac{35}{16} \sin^2 i_1 - \frac{15}{8} \right) (2 + e_1^2) \cos 2\omega_1 + \frac{105}{64} e_1^4 \sin^4 i_1 \cos 4\omega_1 \right] \end{array} \right. \quad (14)$$

由式 (14) 不难发现, 只考虑四极矩项, 且 $e_2 = 0$ 时, 本文导出的摄动函数形式与 Kozai^[2] 和 Lidov^[3] 的结果式相同。由于 R_{12} 中没有 Ω_1 , 因此, Ω_1 对应的正则共轭变量 $H_1 = L_1 \sqrt{1 - e_1^2} \cos i_1$ 为常数, 即内轨道角动量在 Z 轴的分量守恒。又由于 L_1 为常数, 因此, 可对 H_1 进行归一化, 记作 $C = H_1/L_1$ 。对于确定的系统构型, 当 i_1 减小时, e_1 增大, 反之亦然。另外, 当 i_1 的初始值小于 90° 时, 内轨道相对于外轨道是顺行轨道, 且将始终保持顺行, 不会发生轨道翻转; 反之, 当 i_1 的初始值大于 90° 时, 内轨道相对于外轨道是逆行轨道, 且将始终保持逆行, 不会发生轨道翻转。当初始条件满足 $\sqrt{1 - e_1^2} \cos i_1 < \sqrt{3/5}$ 时^[19], 系统存在平衡点, 此时, 偏心率 e_1 和倾角 i_1 都为常数。在平衡点附近, 内轨道近心点幅角 ω_1 在 $\pm 90^\circ$ 附近振动^[4]。只考虑四极矩近似时, 当 $e_2 \neq 0$ 时, 由于 R_{12} 中没有 Ω_1 , 因此, 内轨道角动量的 Z 轴分量仍守恒。

当 $e_2 \neq 0$ 时, 八极矩项 R_{13} 的影响随着 e_2 的增大而增大。2011 年 Naoz 等人^[7] 第一次考虑了八极矩近似, 并用其解释了系外行星中的逆行轨道机制。当考虑到八极矩时,

$\varepsilon = \frac{a_1 e_2}{a_2(1-e_2^2)}$ 表征了 R_{13} 相比于 R_{12} 的量级因子。由于 R_{13} 含有 Ω_1 , 因此, H_1 将随时间发生变化, 即内轨道角动量的 Z 轴分量不再守恒。当外轨道越接近圆形, 或 a_1/a_2 越小时, ε 就越小, 八极矩项的贡献也就越小, 八极矩近似下的轨道演化与经典 Lidov-Kozai 理论也就相似^[6,20]。当初始轨道参数满足一定条件时, 轨道将发生翻转, 而且翻转没有周期性, 呈现混沌状态^[21,22]。八极矩近似下的轨道动力学演化在结构上与四极矩近似下的有很大差别。

比较有意思的问题是, 十六极矩下会不会有新的动力学特性? 由式 (14) 可看出, 当外轨道的偏心率 $e_2 = 0$ 时, 八极矩项消失, 只有 R_{12} 和 R_{14} 项, 这为我们提供了一个更便利的方法来研究十六极矩项对动力学结构的影响。由于 R_{14} 项中 $\cos 4\omega_1$ 的系数项 $\frac{105}{64}e_1^4 \sin^4 i_1$ 相对于 $\cos 2\omega_1$ 的系数项 $\frac{15}{4}e_1^2 \sin^2 i_1$ 是高级项, 因此, $\cos 4\omega_1$ 项可以略去不计。当外轨道偏心率为 0 时, 式 (14) 可简化为:

$$R_1 = -\frac{m_2 a_1^2}{16 a_2^3} [(3 \sin^2 i_1 - 2)(2 + 3e_1^2) - 15e_1^2 \sin^2 i_1 \cos 2\omega_1] + \frac{63m_2 a_1^4}{64 a_2^5} \left[\left(\frac{35}{56} \sin^4 i_1 - \frac{5}{7} \sin^2 i_1 + \frac{1}{7} \right) \left(1 + 5e_1^2 + \frac{15}{8}e_1^4 \right) - e_1^2 \sin^2 i_1 \left(\frac{35}{16} \sin^2 i_1 - \frac{15}{8} \right) (2 + e_1^2) \cos 2\omega_1 \right]. \quad (15)$$

由式 (15) 可知, 十六极矩近似下, $\frac{a_1^4}{a_2^5}$ 项在形式上有类似于 $\frac{a_1^2}{a_2^3}$ 项的结构 $A(e_1, i_1) + B(e_1, i_1) \cos 2\omega_1$ 。由于式 (15) 中不含 Ω_1 , 因此, Ω_1 对应的正则共轭变量 ($H_1 = L_1 \sqrt{1-e_1^2} \cos i_1$) 为常数, 即内轨道角动量在 Z 轴的分量是守恒的, 十六极矩近似下, 系统存在平衡点, 即 $\frac{dG_1}{dt} = 0, \frac{dg_1}{dt} = 0$, 偏心率和倾角在平衡点不随时间变化。图 3 反映了十六极矩近似下, 相对于四极矩近似, 平衡点位置发生轻微偏移, 其中, $m_0 = M_\odot, m_2 = 10^{-3}M_\odot, a_2 = 15 \text{ AU}, e_2 = 0,$ 试验体 $m_1 = 0, a_1 = 5 \text{ AU}, \omega_1 = 90^\circ, \Omega_1 = 0^\circ$ 。由式 (15) 可知, 十六极矩项相对于四极矩项的系数之比近似为 $(a_1/a_2)^2, a_1/a_2$ 越小, 十六极矩项的贡献就越小, 平衡点位置的偏移量也就越小。

当摄动体偏心率 $e_2 \neq 0$ 时, 四极矩项、八极矩项和十六极矩项都存在于摄动函数 R_1 中。由于 Ω_1 存在于 R_1 中, 因此, H_1 将发生变化。假设 $m_0 = M_\odot, m_1 = 0, m_2 = 10^{-3}M_\odot$ 。图 4a) 中, 设定摄动体的轨道根数 $a_2 = 10 \text{ AU}, e_2 = 0.3,$ 试验体的轨道初值为: $a_1 = 1 \text{ AU}, e_1 = 0.001, i_1 = 60^\circ, \omega_1 = 90^\circ, \Omega_1 = 0^\circ$ 。四极矩近似下轨道偏心率和倾角发生周期性振荡,

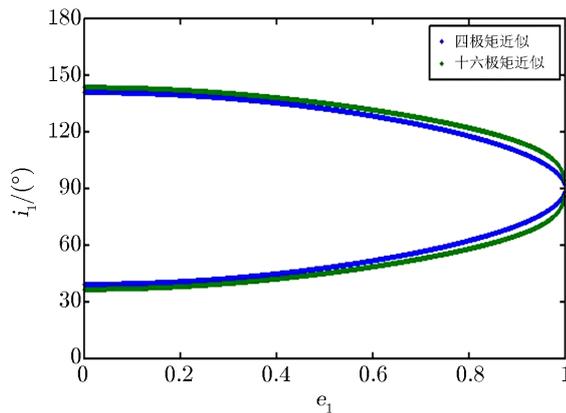


图 3 圆型外摄情形四极矩和十六极矩近似下平衡点位置的比较

系统处于 Lidov-Kozai 共振。而在八极矩和十六极矩近似下，偏心率和轨道倾角的演化几乎一致，且发生周期性振荡时有长期变化趋势，但与八极矩近似相比，十六极矩近似下其振荡的时标相对较短。

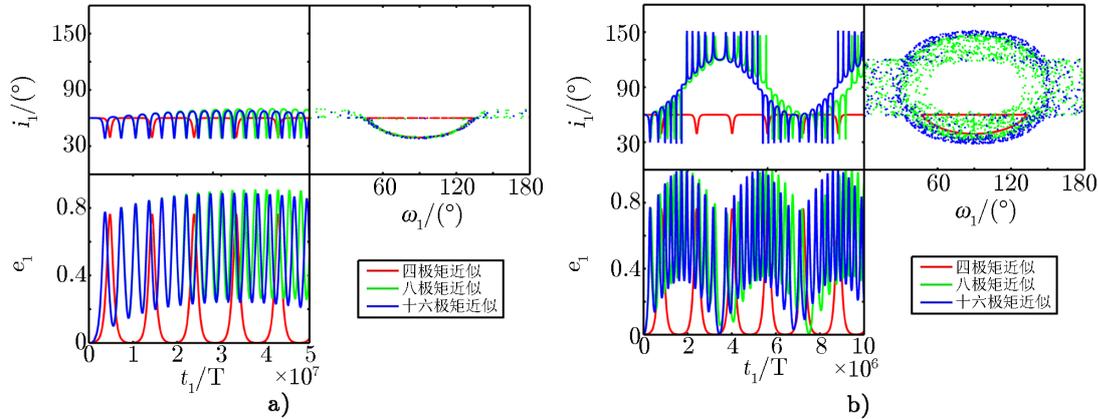


图 4 外摄情形 ($a_1/a_2 = 0.1$) 四极矩、八极矩和十六极矩近似下的系统轨道演化图

图 4b) 中，设定摄动体偏心率 $e_2 = 0.85$ ，其他参数同图 4a)。四极矩近似下，轨道偏心率和倾角发生周期性振荡。八极矩近似和十六极矩近似下，轨道倾角起初处于 Lidov-Kozai 类型的共振。随着其倾角接近 90° ，轨道迅速地发生翻转，变成逆行轨道。在逆行轨道上振荡一定时间后，又迅速地发生翻转，变成顺行轨道。在翻转发生时，偏心率达到最大值，且十分接近于 1。此时， $i_1-\omega_1$ 面反映了翻转没有周期性，呈现混沌性态。八极矩近似下振荡时标稍微滞后于十六极矩近似下的振荡时标。与图 4a) 相比，图 4b) 中的摄动体偏心率越大，越容易激发出轨道翻转。图 4 反映了十六极矩近似相比于八极矩近似对系统的振荡有轻微的激发作用：在振荡趋势一致的情况下，十六极矩近似下的振荡会略快于八极矩近似下的振荡。

图 5a) 中，设定摄动体轨道根数为： $a_2 = 100$ AU, $e_2 = 0.8$ ，试验体的轨道初值为： $a_1 = 3$ AU, $e_1 = 0.3$, $i_1 = 20^\circ$, $\omega_1 = \Omega_1 = 0^\circ$ 。 $i_1-\omega_1$ 面反映了四极矩近似下，轨道处于循环区域；十六极矩近似下，轨道偏心率和倾角演化轨迹基本与八极矩近似下的一致，但十六极矩近似下振荡时标有所缩短。观察轨道倾角的演化，八极矩近似下和十六极矩近似下与四极矩近似下轨道倾角演化有近乎一致的周期，但相应的振幅在某些周期中明显小于四极矩近似下的，而在某些周期中又略小于四极矩近似的振幅，还呈现较长周期的变化。在偏心率的演化上，八极矩近似下和十六极矩近似下的偏心率在较长的周期上振荡，且该周期明显大于四极矩近似下的。相应地，每个周期中呈现的波动现象对应于四极矩近似下的周期振荡。

图 5b) 中，设定摄动体轨道根数为： $a_2 = 100$ AU, $e_2 = 0.9$ ，试验体的轨道初值为： $a_1 = 1$ AU, $e_1 = 0.001$, $i_1 = 88^\circ$, $\omega_1 = 90^\circ$, $\Omega_1 = 0^\circ$ 。四极矩近似下，轨道处于近点角共振区域，轨道倾角和偏心率发生周期性振荡。对应的八极矩近似下和十六极矩近似下的轨道倾角发生了翻转，且翻转没有周期性，呈现混沌性态，演化过程中偏心率的峰值接近 1。此外，八极矩近似下的演化滞后于十六极矩近似下的。由于演化时标达到 10^{10} 量级，因此，相比于图 4，图 5 中呈现出了八极矩近似下和十六极矩近似下的长周期项。

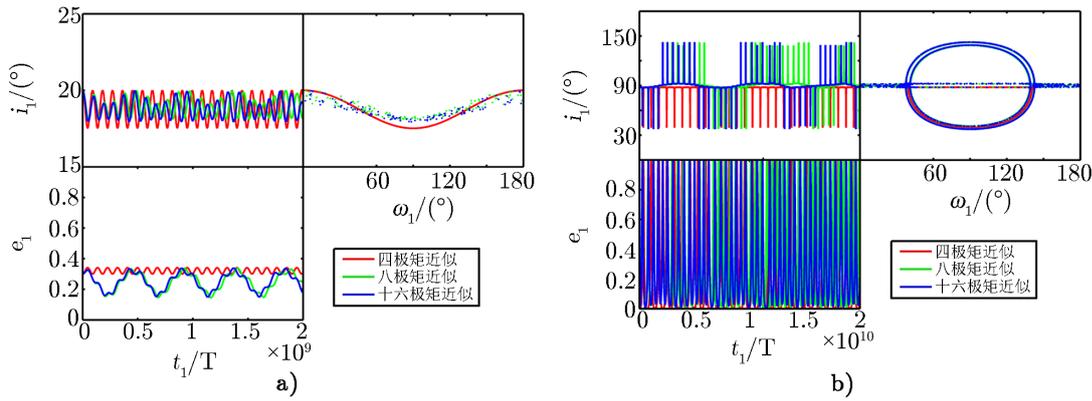


图5 外摄情形 ($a_1/a_2 \approx 0.01$) 四极矩、八极矩和十六极矩近似下的系统轨道演化图

假定受摄体是试验粒子, 在十六极矩近似下对圆型外摄和椭圆型外摄两种情形分别进行讨论。当摄动体处于圆轨道时, 八极矩项消失, 系统存在平衡点, 且平衡点相对于四极矩近似有所偏移, 其偏移量与半长径之比以及摄动体质量有关。当摄动体处于椭圆轨道时, 八极矩近似下和十六极矩近似下系统的演化趋势基本一致, 在某些轨道参数配置下, 轨道会发生非周期性翻转, 但十六极矩近似下系统演化时标略短。图4和图5反映了此情况。

4 内摄情形下试验体的长期共振性态

本文第一次在内摄情形下考虑到十六极矩近似。假定受摄体为试验体, 即 $m_2 = 0$, 因此, m_2 对内部天体的运动没有影响, 内轨道的轨道半长径、偏心率、轨道倾角、升交点经度和近点角都是常数。为了简化公式, 不妨取 $i_1 = 0^\circ, \omega_1 = 180^\circ, \Omega_1 = -180^\circ$ 。由式(7)和式(11)可得到内摄下相应的摄动函数:

$$\left\{ \begin{aligned}
 R_2 &= R_{22} + R_{23} + R_{24} \\
 R_{22} &= -\frac{m_0 m_1}{16(m_0 + m_1)} \frac{a_1^2}{a_2^3} (1 - e_2^2)^{-\frac{3}{2}} [(3 \sin^2 i_2 - 2)(2 + 3e_1^2) - 15e_1^2 \sin^2 i_2 \cos(2\Omega_2)] \\
 R_{23} &= \frac{15m_0 m_1 \alpha_3}{512(m_0 + m_1)} \frac{a_1^3}{a_2^4} e_2 (1 - e_2^2)^{-\frac{5}{2}} \{ [(5 \sin^2 i_2 (1 + 3 \cos i_2) - \\
 &\quad 4(1 + \cos i_2)) \cos(\omega_2 + \Omega_2) + (5 \sin^2 i_2 (1 - 3 \cos i_2) - \\
 &\quad 4(1 - \cos i_2)) \cos(\omega_2 - \Omega_2)] e_1 (4 + 3e_1^2) - \\
 &\quad 35e_1^3 \sin^2 i_2 [(1 + \cos i_2) \cos(\omega_2 + 3\Omega_2) + (1 - \cos i_2) \cos(\omega_2 - 3\Omega_2)] \} \\
 R_{24} &= \frac{m_0 m_1 \alpha_4}{(m_0 + m_1)} \frac{a_1^4}{a_2^5} \left[\frac{9}{512} A \left(1 + 5e_1^2 + \frac{15}{8} e_1^4 \right) + \frac{315}{2048} B e_1^2 (2 + e_1^2) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{6615}{8192} D e_1^4 \right] (1 - e_2^2)^{-\frac{7}{2}}
 \end{aligned} \right. , \quad (16)$$

其中,

$$\left\{ \begin{array}{l} A = (35 \sin^4 i_2 - 40 \sin^2 i_2 + 8) \left(1 + \frac{3}{2} e_2^2\right) - (35 \sin^4 i_2 - 30 \sin^2 i_2) e_2^2 \cos(2\omega_2) \\ B = e_2^2 [(1 + \cos i_2)^2 (1 - 7 \cos i_2 + 7 \cos^2 i_2) \cos(2\omega_2 + 2\Omega_2) + \\ \quad (1 - \cos i_2)^2 (1 + 7 \cos i_2 + 7 \cos^2 i_2) \cos(2\omega_2 - 2\Omega_2)] - \\ \quad \sin^2 i_2 (7 \sin^2 i_2 - 6) (2 + 3e_2^2) e_2^2 \cos(2\Omega_2) \\ D = e_2^2 [(1 + \cos i_2)^2 \sin^2 i_2 \cos(2\omega_2 + 4\Omega_2) + (1 - \cos i_2)^2 \sin^2 i_2 \cos(2\omega_2 - 4\Omega_2)] + \\ \quad \sin^4 i_2 (2 + 3e_2^2) e_2^2 \cos(4\Omega_2) \end{array} \right.$$

由式 (14) 和式 (16) 可以看出, R_{12} 和 R_{22} 有类似的结构。当只考虑四极矩项时, 由于 R_{22} 不含 ω_2 , 故 G_2 为常数, 即试验体在演化过程中保持偏心率不变。由于 R_{22} 含有升交点经度 Ω_2 , H_2 将随时间变化, 即试验体角动量的 Z 轴分量并不守恒, 倾角和升交点经度会发生变化。经简化, 哈密顿函数 F 只有一个自由度, 可以写成 $F = F(H, h)$ 。由 $\frac{dH_2}{dt} = 0$ 和 $\frac{dh_2}{dt} = 0$ 可以求出一组平衡点, 并可以得到 $\Omega_2 = \frac{n\pi}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 它们对应两类轨迹: 循环和振动。轨道倾角关于 Ω_2 的振动就是交点共振^[11]。摄动体的偏心率 e_1 会影响 Ω_2 的振幅。在振荡轨迹中, 摄动体偏心率越大, 倾角发生振动的最小初始值就越小。此外, 在演化过程中轨道倾角在升交点经度 $\Omega_2 = 90^\circ$ 时达到最大值, 此时轨道发生周期性翻转。而在循环轨迹中, 当 i_2 的初始值小于 90° 时, 轨道倾角只存在循环, 没有周期性翻转, 并在 $\Omega_2 = 0^\circ$ 达到最大值。

当考虑到八极矩近似时, 系统的动力学演化会发生显著改变。由于八极矩项 R_{23} 中含有 ω_2 和 Ω_2 , 因此, G_2 和 H_2 不再守恒, e_2 在演化过程中将随时间发生变化。在八极矩近似下, 轨道根数满足一定参数配置时, 四极矩近似下处于循环区域的轨道会发生非周期性翻转, 呈现混沌性态^[8]。

当考虑到十六极矩时, 若摄动体是圆轨道, 即 $e_1 = 0$, 则 R_{23} 项将消失, R_{22} 项因 $\cos(2\Omega_2)$ 的系数项含有 e_1^2 也将消失, 因此, 可以将式 (16) 简化成如下形式:

$$R_2 = -\frac{m_0 m_1}{8(m_0 + m_1)} \frac{a_1^2}{a_2^3} (1 - e_2^2)^{-\frac{3}{2}} (3 \sin^2 i_2 - 2) + \frac{9m_0 m_1 \alpha_4}{512(m_0 + m_1)} \frac{a_1^4}{a_2^5} (1 - e_2^2)^{-\frac{7}{2}} \cdot \left[(35 \sin^4 i_2 - 40 \sin^2 i_2 + 8) \left(1 + \frac{3}{2} e_2^2\right) - (35 \sin^4 i_2 - 30 \sin^2 i_2) e_2^2 \cos(2\omega_2) \right], \quad (17)$$

式 (17) 有类似于外摄下四极矩近似的结构, 不含 Ω_2 , 因此, Ω_2 对应的正则共轭变量 $H_2 = L_2 \sqrt{1 - e_2^2} \cos i_2$ 为常数, 即试验体的轨道角动量的 Z 轴分量守恒。由于 L_2 为常数, 因此, 可记作 $C = H_2/L_2$ 。此时, 系统存在平衡点, $\frac{dG_2}{dt} = 0$, $\frac{dg_2}{dt} = 0$, 偏心率 e_2 和倾角 i_2 都为常数。此外, 系统会有两类轨迹: 振动和循环。由于 R_{24} 中含有偏心率平方项 e_2^2 以及倾角正弦的平方项 $\sin^2 i_2$ 和四次方项 $\sin^4 i_2$, 因此, $\frac{dg_2}{dt} = 0$ 的具体形式可以转化为偏心率的高阶多项式, 故数值求解中平衡点出现了两类: 一类是 ω_2 为 $\pm 90^\circ$; 另一类是 ω_2 为 0° 或 180° 。

设定摄动体轨道根数为: $a_1 = 5$ AU, $e_1 = 0$; 试验体轨道初值为: $a_2 = 15$ AU, $\Omega_2 = 0^\circ$ 。在 $C = 0.05$ 的条件下, 分别分析 $\omega_2 = 90^\circ$ 和 $\omega_2 = 180^\circ$ 时的轨道相图 (见图 6)。如果不考虑轨道交叉带来的影响, 可以看到相图中存在两类共振: $\omega_2 = 90^\circ$ 时外轨道存在两个平衡点, 对应两个共振区域; $\omega_2 = 180^\circ$ 时外轨道存在一个平衡点, 对应一个共振区域。在 $e_2 - \omega_2$ 面, $\omega_2 = 90^\circ$ 的两个共振区域都处于 $e_2 = 0.9$ 的上方, 并且振动范围小于 0.1; $\omega_2 = 180^\circ$ 的共振区域振动范围为 0.55 ~ 0.9。在 $i_2 - \Omega_2$ 面, $\omega_2 = 90^\circ$ 处的两个共振区域的振动范围分别为 $70^\circ \sim 80^\circ$ 和 $30^\circ \sim 50^\circ$; 而 $\omega_2 = 180^\circ$ 处的共振区域的振动范围十分窄小。由于试验体位于 15 AU 处, 对于上述三个平衡点的共振区域, 试验体的近心点在演化过程中可能小于 5 AU, 因此, 存在轨道交叉的情形。

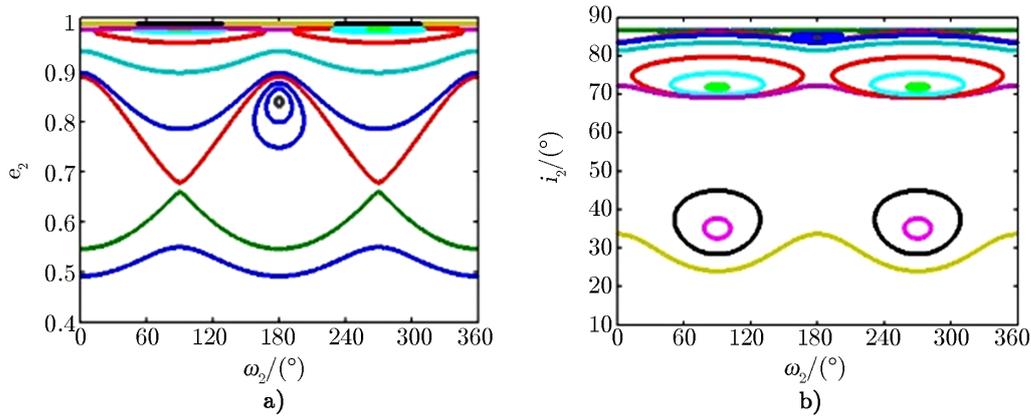


图 6 圆型内摄情形 ($C = 0.05$) 十六极矩近似下的系统相图

设定摄动体轨道根数为: $a_1 = 5$ AU, $e_1 = 0$; 试验体的轨道初值为: $a_2 = 15$ AU, $\Omega_2 = 0^\circ$, $\omega_2 = 90^\circ$ 。在 $C = 0.48$ 条件下, 分别分析 $\omega_2 = 90^\circ$ 和 $\omega_2 = 180^\circ$ 时的轨道相图 (见图 7)。 $\omega_2 = 90^\circ$ 时存在上下两个共振区域; $\omega_2 = 180^\circ$ 时只有循环轨迹。上共振区域的平衡点是 $e_2 = 0.7572$, $i_2 = 42.6988^\circ$, 记作平衡点 a; 下共振区域的平衡点是 $e_2 = 0.1927$, $i_2 = 60.71^\circ$, 记作平衡点 b。平衡点 a 的轨道倾角在 60° 附近振动, 振动范围狭小, 而对应的偏心率振动范围却为 $0.5 \sim 0.8$; 平衡点 b 的倾角和偏心率振动范围都很大。由于运动体位于 15 AU 处, 对于平衡点 a 的共振区域, 试验体的近心点在演化的过程中可能小于 5 AU, 因此, 存在轨道交叉的情形; 而平衡点 b 不存在这种情况。图 6 和图 7 反映了圆型内摄系统在十六极矩近似下的动力学性质与外摄情形的 Lidov-Kozai 共振相似。

当考虑摄动体偏心率 $e_1 \neq 0$ 时, R_2 中包含了与四极矩、八极矩和十六极矩对应的摄动函数。考虑 $m_0 = M_\odot$, 摄动体 $m_1 = 10^{-3}M_\odot$, 试验体 $m_2 = 0$ 。图 8a) 中, 设定摄动体轨道根数为: $a_1 = 0.5$ AU, $e_1 = 0.55$; 试验体的轨道初值为: $a_2 = 10$ AU, $e_2 = 0.4$, $i_2 = 91^\circ$, $\omega_2 = 90^\circ$, $\Omega_2 = 0^\circ$ 。初始轨道是逆行轨道, 四极矩近似下和八极矩近似下轨道倾角进行周期性演化, 没有发生翻转。十六极矩近似下轨道翻转被激发, 而且翻转没有周期性, 呈现混沌性态。四极矩近似下偏心率保持不变, 八极矩近似下偏心率围绕着初始值振荡, 十六极矩近

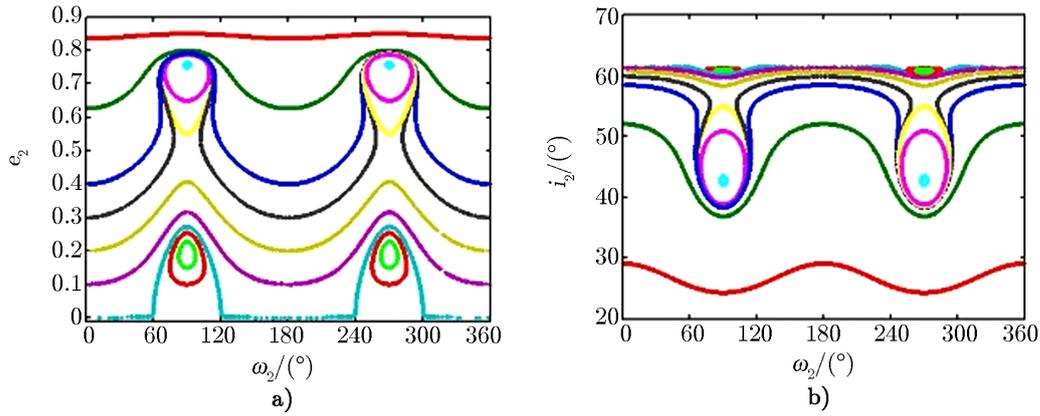


图 7 圆型内摄情形 ($C = 0.48$) 十六极矩近似下的系统相图

似下偏心率的振荡趋势与八极矩一致，时标相比于八极矩近似有所缩短。在 $i_2-\Omega_2$ 面，当四极矩近似和八极矩近似下轨道类型是循环时，十六极矩近似下轨道是振动的。

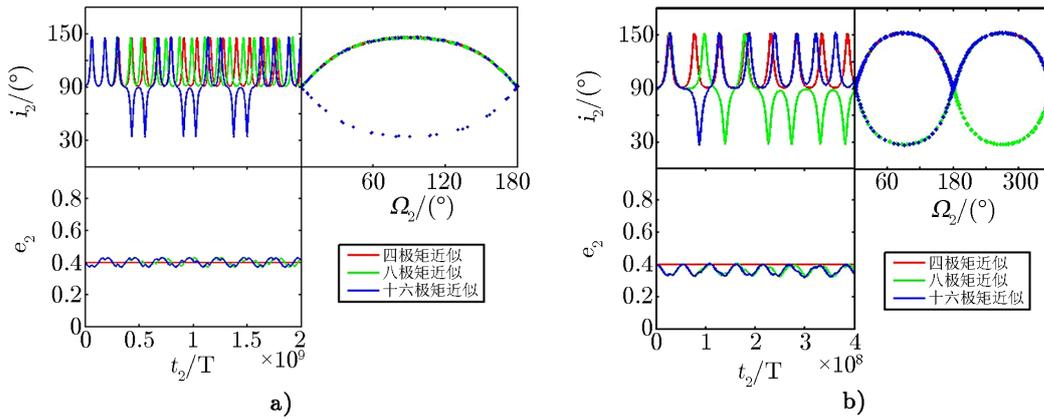


图 8 内摄情形 ($a_1/a_2 \approx 0.05$) 四极矩、八极矩和十六极矩近似下的系统轨道演化图

图 8b) 中，设定摄动体轨道根数为： $a_1 = 0.4 \text{ AU}$, $e_1 = 0.65$ ；试验体的轨道初值为： $a_2 = 7 \text{ AU}$, $e_2 = 0.4$, $i_2 = 91^\circ$, $\omega_2 = \Omega_2 = 0^\circ$ 。八极矩近似下和十六极矩近似下偏心率围绕初始值振荡，但最大值不超过初始值。十六极矩近似下偏心率振荡的周期稍短于八极矩近似下的。八极矩近似下和十六极矩近似下轨道倾角发生了翻转，翻转没有周期性，呈现混沌性态。因此，十六极矩近似下系统演化有着明显异于八极矩近似的性质。考虑了十六极矩项的影响时，轨道第一次翻转先于八极矩近似的，并且在八极矩近似下轨道仍处于顺行轨道时，十六极矩近似下的轨道转移到了逆行轨道。在 $i_2-\Omega_2$ 面，当四极矩近似下轨道类型是循环时，八极矩近似下和十六极矩近似下轨道是振动的。从式 (16) 可知，当摄动体偏心率并不充分大时，会出现八极矩项小于十六极矩项，以及八极矩项和十六极矩项量级相当的情形。对于前

者, 此时可能会有十六极矩近似下轨道发生翻转而八极矩近似下未发生翻转的情形, 如 8a) 所示。对于后者, 八极矩近似下轨道发生翻转的, 十六极矩项会明显影响系统的演化, 如 8b) 所示。综合图 8, 展开到十六极矩时, 偏心率与展开到八极矩时的演化趋势基本一致。十六极矩近似下轨道倾角会发生新的翻转。

图 9a) 中, 设定摄动体轨道根数为: $a_1 = 3 \text{ AU}$, $e_1 = 0.5$; 试验体的轨道初值为: $a_2 = 10 \text{ AU}$, $e_2 = 0.1$, $i_2 = 61.15^\circ$, $\omega_2 = 90^\circ$, $\Omega_2 = 0^\circ$ 。考虑到十六极矩项并对若干个轨道周期积分, 轨道倾角并没有发生翻转, 故不存在混沌现象。由于半长径之比达 0.3, 因此, 十六极矩项的贡献更大。十六极矩近似下偏心率极大值明显大于八极矩近似下偏心率的极大值, 但小于摄动体的偏心率。十六极矩近似下偏心率演化的时标显著地长于八极矩近似的。通过 i_2 - Ω_2 面可以看出, 尽管引入了十六极矩项, 系统依旧保持循环轨迹。

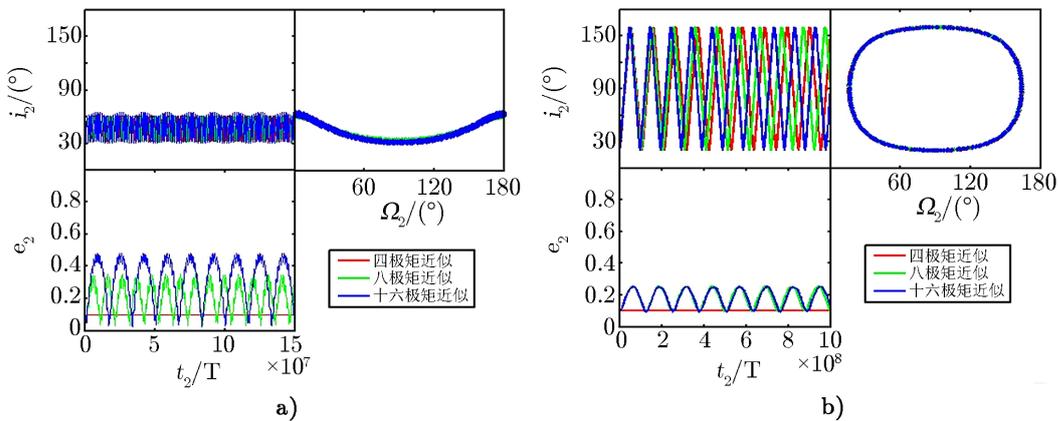


图 9 大椭圆型内摄情形四极矩、八极矩和十六极矩近似下的系统轨道演化图

图 9b) 中, 设定摄动体轨道根数为: $a_1 = 3 \text{ AU}$, $e_1 = 0.9$; 试验体的轨道初值为: $a_2 = 30 \text{ AU}$, $e_2 = 0.1$, $i_2 = 20^\circ$, $\omega_2 = \Omega_2 = 90^\circ$ 。四极矩近似下该构型的轨迹位于交点共振区域。考虑到十六极矩时, 轨迹仍位于交点共振区域。随着时间的演化, 轨道倾角在顺行和逆行之间周期性振荡, 该构型下轨道倾角在四极矩、八极矩和十六极矩近似下的振动趋势基本一致, 但十六极矩近似下的时标明显短于八极矩近似下的。对于偏心率的演化, 八极矩近似和十六极矩近似下的振幅基本一致, 但十六极矩近似下的时标稍长于八极矩近似下的。可以看出, 此构型下不存在混沌现象。

在假定受摄体是试验粒子的基础上, 在十六极矩近似下对圆型内摄和椭圆型内摄两种情形分别进行了讨论。我们发现, 当摄动体处于圆轨道时, 系统的平衡点不少于两个, 其数量取决于常数 C 的取值, 即与角动量的 Z 轴分量有关。类似于 Lidov-Kozai 共振, 平衡点对应于近点共振。区别于 Lidov-Kozai 效应只在 $\omega_2 = \pm 90^\circ$ 可能存在近点角共振, 圆型内摄还在在 $\omega_2 = 0^\circ, 180^\circ$ 处可能存在近点共振。当摄动体处于椭圆轨道时, 八极矩近似下轨道倾角不发生翻转的, 十六极矩近似会激发出新的翻转。而十六极矩项对偏心率演化有复杂的影响, 主要体现在偏心率的振幅和时标上。当半长径之比不大时, 八极矩近似下和十六极矩近似下

偏心率的演化趋势基本一致,但十六极矩近似下的时标略短,如图 8 所示。而当半长径之比达到 0.3 时,十六极矩近似下偏心率的振幅显著大于八极矩近似下偏心率的振幅,并且十六极矩近似下的时标明显较长,如图 9a) 所示。另外,在图 9b) 中十六极矩近似下的时标略长于八极矩近似下的。

5 讨论与总结

本文在雅可比坐标系下建立了第三体摄动模型,并在空间固定参考架下基于半长径之比将摄动函数展开至十六极矩。事实上,根据需要可以将其展开至任意极矩。通过在轨道周期上进行双重平均,本文得到了十六极矩近似下第三体摄动的平均模型。为了简化问题,基于受摄体是试验粒子的假设,本文考虑了两种情形:外摄型和内摄型。由于试验粒子不影响中心天体和摄动体的运动,因此,采用该假设便于研究摄动体对受摄体的影响。

对于外摄型,考虑到四极矩时,便是经典的 Lidov-Kozai 效应,此时,即使摄动体处于椭圆轨道,轨道角动量的 Z 轴分量仍将守恒。当考虑到八极矩时,轨道会发生非周期性翻转,角动量的 Z 轴分量不再守恒。考虑到十六极矩,当摄动体处于圆轨道时,八极矩项消失,运动体角动量的 Z 轴分量将保持守恒,系统存在类似于四极矩近似下的近点共振。与四极矩近似下的情况相比,十六极矩近似下圆型外摄的平衡点发生了轻微的偏移,偏移量的大小与半长径的比率和摄动体质量有关(见图 3)。当摄动体的偏心率不为零时,四极矩项、八极矩项和十六极矩项都出现在摄动函数中,其中,八极矩近似下和十六极矩近似下轨道偏心率与倾角的演化趋势基本一致,但后者的振荡时标相对略短。摄动体偏心率较大时,八极矩近似下和十六极矩近似下运动体的轨道会发生非周期性翻转。由于积分时间足够长,图 5 还呈现了八极矩近似和十六极矩近似下的长周期项。

对于内摄型,考虑到四极矩时,试验体偏心率不发生变化,系统存在交点共振,且摄动体的偏心率越大,交点共振要求的轨道倾角初始值越小。当考虑到八极矩时,某些条件下,外轨道会发生翻转,且翻转没有周期性,呈现混沌性态。考虑到十六极矩时,当摄动体处于圆轨道时,类似于外摄时的 Lidov-Kozai 效应,系统存在对应近点角共振的平衡点。平衡点的数量和常数 C 的取值有关。区别于 Lidov-Kozai 共振的平衡点只位于近心点幅角 90° ,十六极矩近似下系统的平衡点还可能位于近心点幅角 180° 。当摄动体处于椭圆轨道时,十六极矩项对系统有复杂的影响。当摄动体偏心率不充分大时,式 (16) 中将出现八极矩项小于十六极矩项,或八极矩项与十六极矩项量级相当的情形,此时十六极矩项不可忽视,它会对系统产生明显的影响,使轨道发生新的翻转。当半长径之比增大时,摄动体离运动体的距离也增大,从而使十六极矩项量级变大,因此,其影响也会变大。十六极矩近似下偏心率的振幅显著大于八极矩近似下偏心率的振幅,并且十六极矩近似下的时标明显较长。而当半长径之比不大时,八极矩近似和十六极矩近似下偏心率演化趋势与振幅基本一致,十六极矩近似的时间尺度略长于八极矩近似的时间尺度,而且系统在十六极矩近似下还会激发出新的轨道翻转。综合图 8 和图 9 来看,对于八极矩近似下不发生翻转,而考虑了十六极矩项后发生翻转

的, 可能达到了翻转的某种临界条件。初步来看, 轨道翻转与摄动体质量及偏心率、半长径之比、试验体初始偏心率和倾角有关。可以在限定某些条件下进行后续研究, 进而得到更定性的结论。

内摄的某些情形下十六极矩项对系统动力学结构有着不可忽视的影响, 因此, 考虑十六极矩项有助于揭示系统真实的动力学结构。当前的系外行星系统中有相当数量的行星处于多星系统, 其中有些处于大椭圆轨道。若摄动体轨道是内摄大椭圆构型, 随着偏心率增大, 远心点距离也增大, 远心点附近摄动体与试验体的距离减小; 反之, 外摄大椭圆构型中近心点距离随着偏心率增大而减小, 近心点附近摄动体与试验体的距离也减小。上述两种情形中十六极矩项量级相对增大, 其影响不可忽视, 因此, 十六极矩项的贡献也会增大。考虑十六极矩项将有助于揭示系外行星的形成机制。

参考文献:

- [1] Murray C D, Dermott S F. *Solar System Dynamics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999: 302
- [2] Kozai Y. *AJ*, 1962, 67: 591
- [3] Lidov M L. *Planetary and Space Science*, 1962, 9: 719
- [4] Kozai Y. *Proceedings of the Japan Academy, Series B: Physical and Biological Sciences*, 2004, 80: 157
- [5] Kinoshita H, Nakai H. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2007, 98: 67
- [6] Lithwick Y, Naoz S. *ApJ*, 2011, 742: 94
- [7] Naoz S, Farr W M, Lithwick Y, et al. *Nature*, 2011, 473: 187
- [8] Naoz S, Li G, Zanardi M, et al. *AJ*, 2017, 154: 18
- [9] Li G, Naoz S, Holman M, et al. *ApJ*, 2014, 791: 86
- [10] Li G, Naoz S, Holman M, et al. *ApJ*, 2015, 802: 71
- [11] Laskar J, Boué G. *A&A*, 2010, 522: A60
- [12] Whipple A, Shelus P J. *Icarus*, 1993, 101: 265
- [13] Yokoyama T, Santos M T, Cardin G, et al. *A&A*, 2003, 401: 763
- [14] Clifford M W. *Physical Review D*, 2017, 96: 023017
- [15] Valtonen M, Karttunen H. *The Three-body Problem*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2006: 47
- [16] 刘林. *人造地球卫星轨道力学*. 北京: 高等教育出版社, 1992: 42
- [17] Kaula W M. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 1961, 5: 104
- [18] Kaula W M. *AJ*, 1962, 67: 301
- [19] Kozai Y. *Celestial Mechanics*, 1985, 36: 47
- [20] Naoz S. *ARA&A*, 2016, 54: 441
- [21] Naoz S, Kocsis B, Loeb A, et al. *ApJ*, 2013, 773: 187
- [22] Naoz S, Farr W M, Lithwick Y, et al. *MNRAS*, 2013, 431: 2155

Higher-order Expansion of Perturbed Function and Secular Resonance

WANG Wen-lei^{1,2,3}, XU Xue-qing^{1,2}, ZHOU Yong-hong^{1,2}, LIAO Xin-hao^{1,2}

(1. Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China; 2. Key Laboratory of Planetary Sciences, Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China; 3. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Research about the secular resonance effect of the three-body systems helps to understand the stability of these systems. This study establishes a general motion model for three-body systems in Jacobi coordinates, and the perturbed functions are expanded up to the hexadecapole order, with the semi-major axis ratio. Meanwhile, the short-period terms of the internal and external orbits are eliminated by double averaged method. Basing on the restricted three-body model, the investigation is discussed in two cases. (1) The perturbing body is outer, the hexadecapole term has only weak effects on the long-term evolution of the system. (2) The perturbing body is inner, the system will have new resonance and chaos phenomena. The inner part also need to be considered with two cases. (a) The orbit of the perturbing body is circular, the system exists the precession of the argument of periapse, which is similar to Lidov-Kozai effect with an equilibrium point of $\omega_2 = \pm 90^\circ$, which ω_2 is argument of pericenter, while this system under the hexadecapole-level approximation also has possible equilibrium points of $\omega_2 = 0^\circ$ and $\omega_2 = 180^\circ$. In addition, the quantity, position and stability of equilibrium point will be affected by the angular momentum of Z axis component. (b) The interior orbit is elliptical, new orbital flips will be excited with the hexadecapole approximation, which are chaotic and not periodic. Moreover, these orbital flips are obviously different from those with octupole approximation. Specifically, while the semi-major axis ratio is quite large, the amplitude of eccentricity under the hexadecapole approximation is significantly greater than that under the octupole approximation.

Key words: celestial mechanics; secular body perturbation; orbital evolution; hexadecapole approximation