

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2016.01.05

天文光变周期提取算法综述

安 涛^{1,3}, 王俊义², 陆相龙^{1,2}, 劳保强¹, 魏延恒¹,
董典桥^{1,2}, 陆 扬¹, 伍筱聪¹

(1. 中国科学院 上海天文台, 上海 200030; 2. 桂林电子科技大学 广西密码学组信息安全重点实验室, 桂林 541004; 3. 中国科学院 射电天文重点开放实验室, 南京 210008)

摘要: 随着大量巡天项目的开展和完成, 天文领域积累了大量的光变数据。这些数据中蕴含了许多有重要价值的物理参数, 如光变周期, 它对研究光变的物理机制、爆发预测和天体质量估算等有很大的帮助。但受到天体自身动力学过程、观测条件和仪器状态等客观因素的影响, 光变数据往往是非均匀采样的, 并且都不同程度地受到噪声的影响。因此, 非常有必要研究基于非均匀采样信号的光变周期提取算法。综述了基于频域、时域和时-频域分析的三大类光变周期提取算法, 主要包括 Lomb-Scargle 周期图法、Jurkevich 算法和加权小波 Z 变换算法等, 着重分析和比较了这些算法的性能, 同时分析了它们的优缺点, 最后总结与展望了光变周期算法。

关 键 词: 非均匀采样时间序列; 周期; 频域; 时域; 时-频域

中图分类号: P113 **文献标识码:** A

1 引 言

光变是衡量天体辐射流量随时间变化的重要指标, 光变分析则是研究天体辐射机制和内部结构及其变化的常用手段。尤其是银河系内以及河外星系中的致密天体, 无法通过直接成像的方法 (如甚长基线干涉测量技术等) 获得内部能源的动力学信息, 使得光变分析显得尤为重要。通过对天体光变的时间序列分析可以得到很多有用的物理参数, 例如光变周期、光变幅度、相位信息、不同波段光变之间的相关性和时间延迟等。其中, 光变周期对揭示光变现象背后的物理机制很有帮助, 同时也可以用来对未来光变趋势进行预测。通过对某一特定天体的光变曲线进行记录和时间序列分析, 可以寻找和证认该天体光度的特征变化周期, 从而对下次“爆发”的时间进行推断, 并有针对性地组织观测。除此之外, 还可通过观测得到的周期来估算天体的质量等物理参数, 研究驱动周期性光变的物理机制。类似的光变研究已经

收稿日期: 2015-09-02; 修回日期: 2015-11-16

资助项目: 科技部政府间科技合作专项“SKA 科学数据处理关键技术研究”; 科技部 973 项目“SKA 建设准备阶段关键问题研究”(2013CB837900)

通讯作者: 安涛, antao@shao.ac.cn

广泛地用于 X 射线双星^[1] 和活动星系核^[2] 的研究中。

然而, 传统的信号处理技术大多是针对均匀采样信号和基于离散傅里叶变换的, 即通过频域傅里叶变换分析来描述信号的功率谱特征。但在许多实际应用的场合中, 由于受天体运行状况、望远镜观测时间、观测季节、仪器状态以及人为操作错误等客观因素的影响, 很难完整地观测和跟踪整个光变过程, 即获得的光变数据通常是非均匀采样时间序列。传统的傅里叶变换分析方法在处理连续、均匀采样的时间序列时能够得到很好的频谱图, 但当处理非均匀采样且包含有大量噪声的实际观测数据时, 时间序列的非均匀性和有限时间跨度等因素会使傅里叶变换的功率谱中引入较多干扰, 产生虚假谱峰以及特征谱的能量泄露等^[3]。如果噪声过大, 间断过多过大, 也会造成真实周期信号振幅和相位的偏差, 严重情况下将会导致参数提取错误, 甚至周期证认失败。另一方面, 如果周期信号不稳定, 即周期随着时间演化而变化, 也会影响傅里叶分析的结果。因此, 对非均匀采样信号周期提取算法的研究至关重要^[4]。

为了能够从非均匀采样时间序列中提取出光变周期, 很多专家提出了多种处理算法。对于基于频域的分析方法, 1976 年, Lomb 对非均匀天文观测数据做了最小二乘法频率分析^[5], 之后 Scargle 对 Lomb 的非均匀时间序列算法进行了完善, 发展成为后来常用的 Lomb-Scargle (LS) 周期图法^[6]。1981 年, Ferraz-Mello 提出了时间补偿离散傅里叶变换 (Date-compensated Discrete Fourier Transform, DCDFT) 算法, 用于提取处理非等间隔数据的周期^[7]。1995 年, Foster 在 DCDFT 算法的基础上结合 Roberts 的 CLEAN 算法^[8], 提出了 CLEANest 算法^[9]。鉴于 LS 算法存在两处明显的缺陷: (1) 没有考虑观测误差; (2) 假设时间序列与拟合所采用的正弦函数的均值相同。Zechmeister^[10] 于 2009 年提出了归一化 Lomb-Scargle (Generalised Lomb-Scargle, GLS) 算法, 使得算法精度得到很大改善。

基于时域的分析方法, Jurkevich 在 1971 年率先提出了一种建立在期望值均方差基础上的处理不等间隔观测数据的统计方法, 称 Jurkevich (JK) 算法^[11]: 能够方便地处理非等间隔抽样信号并具有较好的分析效果。1978 年, Stellingwerf 提出了一种基于统计学的搜索非均匀时间序列周期分量的信号处理技术——状态弥散最小化 (Phase Dispersion Minimization, PDM) 算法^[12], 它具有的优点为: 不依赖先验模型, 计算时间短和实现简单。1985 年, Simonetti 等人提出了一种分析非均匀采样时间序列的信号处理方法——结构函数 (Structure function, SF) 法^[13]。1988 年, Edelson 和 Krolik 提出了离散相关函数 (Discrete Correlation Function, DCF) 算法^[14], 该算法不仅能够分析两个不同时间序列之间的互相关性, 也可用于单一时间序列的周期性分析。1997 年, Alexander 对 DCF 算法进行了改进和发展, 得到了 Z 变换离散相关函数 (Z-transformed Discrete Correlation Function, ZDCF) 算法^[15], 校正了 DCF 算法中 CCF 计算的偏差问题, 使计算结果更加准确。

20 世纪 80 年代中期, 随着小波分析方法的兴起, Foster^[16] 在 1996 年又提出了加权小波 Z 变换 (Weighted Wavelet Z-transform, WWZ) 算法。WWZ 是一种基于小波分析和向量投影的周期提取算法, 它非常适用于非平稳信号的分析, 在时-频局部特性分析方面具有优势。

上述算法中, 大多数算法已经广泛应用于具有非均匀采样特性的天体光变数据的周期分析中, 并都取得了非常重要的分析结果^[17-20]。然而, 没有一种算法能够完全适合于任意类型非均匀采样序列的周期分析。

文章首先介绍了基于频域分析 (LS 算法、CLEANest 算法等)、基于时域分析 (JK 算法、DCF 等) 和基于时-频域分析的周期提取算法 (WWZ 算法), 接着综合比较 10 种算法对超亮 X 射线源 NGC 5408 X-1 的周期搜索, 然后对三类算法的性能和优缺点进行了分析和对比, 最后对非均匀采样信号的周期提取算法进行总结和展望。

2 光变周期提取算法原理介绍

2.1 基于频域分析的周期提取算法

一般情况下, 对时间序列进行周期估算的最直接手段是利用傅里叶变换 (Fourier Transform), 即频域分析方法。傅里叶分析的研究与应用至今已有 100 多年的历史^[21], 早在 1822 年, 法国数学家傅里叶在研究热传导理论时出版了一本著作《热的解析理论》^[22], 提出并证明了将周期函数展开为正弦级数的原理, 奠定了傅里叶级数的理论基础。特别是快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform, FFT) 的提出^[23], 使得傅里叶变换在离散信号处理领域占据了重要的地位。离散傅里叶变换法将信号从时域转移到频域中进行分析, 通过观察离散信号的功率谱, 就很容易确定离散信号在某一特征频率处的相位和幅值, 从而揭示出信号频域特性^[24]。对于均匀采样的离散时间序列 $x(t_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots, N$, 其离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform, DFT) 的表达式为:

$$X(f) = \sum_{n=1}^N x(t_n) e^{-j2\pi f t_n} \quad (1)$$

然而, 对于非均匀采样信号, 式 (1) 中的传统离散傅里叶变换不再适用。原因是 DFT 对采样的间隔十分敏感, 假如直接使用 DFT 对非均匀采样信号进行处理, 频谱中很容易出现虚假的周期成分^[16]。因此, 各种基于离散傅里叶变换的改进算法应运而生, 在一定程度上解决了非均匀采样带来的问题。下面将介绍几种基于频域分析 (傅里叶变换) 的非均匀采样信号周期提取算法。

2.1.1 Lomb-Scargle 周期图法

LS 算法是由 Lomb 和 Scargle 提出并改进的一种基于 DFT 原理的周期提取算法, 它在一定程度上解决了非均匀采样间隔产生的非周期信号^[3, 5, 6], 避免了对非均匀采样时间序列进行插值处理, 并考虑了非均匀采样对幅度和相位带来的影响。LS 算法的基本原理是将一系列三角函数的线性组合 $y = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ 通过最小二乘法来拟合时间序列, 并在此基础上, 将信号特征从时域转换到频域上^[3]。对于非均匀采样时间序列 $x(t_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, 其 LS 功率谱定义为:

$$P_{LS}(f) = \frac{1}{2} \times \left[\frac{\left\{ \sum_{i=1}^N x(t_i) \cos[2\pi f(t_i - \tau)] \right\}^2}{\sum_{i=1}^N \cos^2[2\pi f(t_i - \tau)]} + \frac{\left\{ \sum_{i=1}^N x(t_i) \sin[2\pi f(t_i - \tau)] \right\}^2}{\sum_{i=1}^N \sin^2[2\pi f(t_i - \tau)]} \right], \quad (2)$$

其中 f 为测试频率, τ 为时间偏移量, 可通过公式:

$$\tan 2\omega\tau = \frac{\sum_{i=1}^N \sin 2\omega t_i}{\sum_{i=1}^N \cos 2\omega t_i} \quad (3)$$

得到, 其中 $\omega = 2\pi f$ 。

2.1.2 时间补偿离散傅里叶变换算法

对于非均匀采样时间序列, 当数据的采样间隔与序列的周期接近时, 传统的 LS 算法即使能够估算出主要的周期成分, 却严重地低估了特征频率的幅度, 原因是基函数之间不满足正交的性质。Ferraz-Mello 于 1981 年提出了时间补偿离散傅里叶变换 (Date-compensated Discrete Fourier Transform, DCDFT), 即用函数空间投影的思想来描述傅里叶分析, 较好地解决了上述问题^[7]。Ferraz-Mello 首先利用 Gram-Schmidt 正交化方法将基函数进行正交处理, 再将时间序列映射到正交化后的基函数上, 从而得到了非均匀采样时间序列的频谱^[7]。

DCDFT 算法可以理解为一个回归算法, 具体步骤如下: 首先, 引入一个常数使得时间序列的均值为 0, 即满足 $\sum_{i=1}^N f(t_i) = 0$ 。假设数据分解的三个基函数分别为: $H_0(t) = 1$, $H_1(t) = \sin(\omega t)$, $H_2(t) = \cos(\omega t)$, 对它们进行 Gram-Schmidt 正交化可得: $h_0 = \alpha_0 H_0$, $h_1 = \alpha_1 H_1 - \alpha_1 h_0 (h_0, H_1)$, $h_2 = \alpha_2 H_2 - \alpha_2 h_0 (h_0, H_2) - \alpha_2 h_1 (h_1, H_2)$, 其中, 括号表示两个向量的内积, 即 $g_1 g_2 = \sum g_1(t_1) g_2(t_2)$, 且满足: $(h_0, h_0) = (h_1, h_1) = (h_2, h_2) = 1$, 再计算可得到 α_0^{-2} , 进而得到回归系数:

$$c_0 = (f, h_0) = 0 \quad , \quad (4)$$

$$c_1 = (f, h_1) = \alpha_1 (f, H_1) \quad , \quad (5)$$

$$c_2 = (f, h_2) = \alpha_2 (f, H_2) - \alpha_1 \alpha_2 c_1 [(H_1, H_2) - \alpha_0^2 (H_0, H_1)(H_0, H_2)] \quad . \quad (6)$$

对于均匀采样时间序列, 上述过程可以理解为使用一个正弦的模型对数据进行曲线拟合处理。如果时间序列的周期和采样间隔之间不满足一定的比例关系, 且时间序列的时间跨度可以覆盖所有的相位时, 则存在关系:

$$(H_0, H_1) \cong (H_0, H_2) \cong (H_1, H_2) \cong 0 \quad , \quad (7)$$

$$(H_1, H_1) \cong (H_2, H_2) \cong \frac{1}{2} \alpha_0^{-2} = \frac{2}{N} \quad . \quad (8)$$

因此 $c_1 \approx \alpha_0 \sqrt{2} (f, H_1)$, $c_2 \approx \alpha_0 \sqrt{2} (f, H_2)$ 。最终, 得到功率谱密度表达式:

$$I(\omega) = 2\alpha_0^{-2} \|F(\omega)\|^2 = c_1^2 + c_2^2 \quad . \quad (9)$$

当数据为非均匀采样时, 式 (9) 中的 $F(\omega)$ 定义为:

$$F(\omega) = \frac{(f, h_1 + ih_2)}{\alpha_0 \sqrt{2}} \quad . \quad (10)$$

除此之外,考虑到观测数据存在观测误差,为了统一观测的精确度, Ferraz-Mello 引入加权函数 $\Omega_i = \omega(t_i)$, 将基函数之间的内积重新定义为: $g_1 g_2 = \sum \omega_i g_1(t_1) g_2(t_2)$ 。将上式代入式 (5) 和式 (6) 得:

$$c_1(\omega) = \alpha_1 \sum \omega_i f(t_i) \cos x_i, \quad (11)$$

$$c_2(\omega) = \alpha_2 \sum \omega_i f(t_i) \sin x_i - \alpha_1 \alpha_2 c_1 \left[\sum \omega_i \sin x_i \cos x_i - \alpha_0^2 \left(\sum \omega_i \sin x_i \right) \left(\sum \omega_i \cos x_i \right) \right]. \quad (12)$$

一般情况下,对于单一的测试频率 ω , DCDFDT 的功率和幅度定义为:

$$P(\omega, |x) = \frac{N[\langle y|y \rangle - \langle 1|y \rangle^2]}{2s^2}, \quad A(\omega, |x) = \sqrt{2[\langle y|y \rangle - \langle 1|y \rangle^2]}, \quad (13)$$

其中 N 为数据点个数, y 为时间序列模拟函数, s^2 为数据方差, 此功率的计算具有统计学上的意义。

2.1.3 CLEANest 算法

尽管 DCDFDT 算法很好地改进了对信号频率的估计, 但当处理的序列存在较大的时间间隔时, 数据间隔的不规则性将会产生大量虚假谱峰, 从而混淆了对真实周期的判断。Foster 借鉴了 Robert 的 CLEAN 算法^[8], 在 1995 年提出了一种基于 DCDFDT 加频率清除的周期分析方法——CLEANest 算法^[7, 9]。CLEANest 算法能够从复杂、包含大量虚假谱峰的功率谱中提取出序列的真实周期。此外, CLEANest 算法还能有效地分离出多周期时间序列中的各频率成分。

对于非均匀采样时间序列 $x(t_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, CLEANest 算法的具体步骤如下:

- (1) 首先计算 $x(t_i)$ 的 DCDFDT 功率谱, 在 DCDFDT 功率谱中消除一个最强的频率成分 f_j , 生成残余谱 $A_{\text{res}}(\omega, |x(t)) = A_1(\omega, |x(t) - x_j(t))$ 。
- (2) 然后观察残余谱, 查看是否有频率成分受到删除频率成分的影响。如果存在其他成分消失的情况, 则消失的成分很有可能是由于被删除成分的旁瓣效应造成的, 是一个虚假周期成分, 因此 CLEANest 算法增强了消除旁瓣伪周期的有效性。
- (3) 在残余谱中再次删除最强的频率成分, 再次进行步骤 (2), 如此反复, 直到所有可能具有统计意义的频率成分都被消除完为止, 生成最终的 CLEANest 功率谱。理论上的 CLEANest 功率谱应该是平滑的、“干净的”。

最后通过提取的各频率成分来模拟原始数据, 即得到重构的光变曲线, 从而实现了与原始光变曲线的对比, 进一步验证周期提取, 还可预测光变的长期趋势。

2.1.4 归一化 Lomb-Scargle 算法

Zechmeister 在文献 [10] 中指出: 传统的 LS 算法虽然有效, 但却存在两个明显的缺陷: 1) 计算中并没有考虑误差 (Measurement Errors) 的存在; 2) 通常默认或预先假设时间序列与拟合所采用的正弦函数的均值相同。第一个缺陷易导致周期成分的幅度和相位偏离真实值, 可以采用 Gilliland 和 Baliunas 提出的加权总和^[25]进行修正; 第二个缺陷可以通

过在拟合正弦函数 $X_f(t_j) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ 中加入常数 c 进行修正, 即采用修正的正弦函数来对时间序列进行拟合, 定义为 $X_f(t_j) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + c$ 。基于以上考虑, Zechmeister 提出了归一化 Lomb-Scargle (Generalised Lomb-Scargle, GLS) 算法。

对于非均匀采样时间序列 $x(t_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, 每个时间点 t_i 处的数据误差为 δ_i 。GLS 的功率谱^[10] 表示为:

$$p(\omega) = \frac{1}{\sum \omega_i (y_i - \bar{y})^2} \left\{ \frac{[\sum \omega_i (y_i - \bar{y}) \cos(\omega t_i)]_\tau^2}{[\sum \omega_i \cos^2 \omega t_i - (\sum \omega_i \cos \omega t_i)^2]_\tau} + \frac{[\sum \omega_i (y_i - \bar{y}) \sin(\omega t_i)]_\tau^2}{[\sum \omega_i \sin^2 \omega t_i - (\sum \omega_i \sin \omega t_i)^2]_\tau} \right\} . \quad (14)$$

上式中, ω_i 为归一化权重, 定义为: $\omega_i = 1/(W\delta_i^2)$ 。其中, $W = \sum(1/\delta_i^2)$, $\sum \omega_i = 1$, τ 为冗余参数, 且满足:

$$\tan(2\omega\tau) = \frac{\sum \omega_i \sin 2\omega t_i - 2 \sum \omega_i \cos \omega y_i \sum \omega_i \sin \omega t_i}{\sum \omega_i \cos 2\omega t_i - [(\sum \omega_i \cos \omega t_i)^2 - (\sum \omega_i \sin \omega t_i)^2]} . \quad (15)$$

GLS 算法与 LS 算法在原理上非常相似, 主要区别在于 GLS 算法利用加入常数 c 的正弦函数对时间序列进行拟合处理和每次计算时都考虑了观测误差 ω_i 的影响。因此从理论上说, GLS 算法的周期估计准确度比 LS 算法的要高。

2.2 基于时域分析的周期提取算法

基于时域分析的方法 (如统计学分析方法) 跟基于频域分析的方法不同, 即不需要通过傅里叶变换, 而是主要从时间序列自身的统计特性出发, 将序列中的数据点和与之相距固定时间间隔 (或时延) 的其他数据点作比较, 考察这些数据点之间的差异。通过数据分段、装箱, 以及利用数据间最大相关性找出序列的周期。常用的基于时域分析的算法有: Jurkevich 提出的 Jurkevich 算法^[11]、Stellingwerf 的状态弥散最小化算法^[12]、Simonetti 的结构函数算法^[13]、Edelson 等人提出的离散相关函数算法^[14]、Alexander 的 Z 变换离散相关函数法^[15] 等。

2.2.1 Jurkevich 算法

Jurkevich (JK) 算法由 Jurkevich 于 1971 年提出, 它是一种基于数据均方差期望原理的周期提取算法^[11]。JK 算法通过测试周期来折叠数据, 即根据测试周期附近的相位将所有数据分为 m 组, 计算每一组的方差 V_i^2 及所有组的方差总和 V_m^2 。如果测试周期接近于真实周期, 则 V_m^2 得到极小值, 具体实现过程如下。

对于非均匀采样时间序列 $x(t_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, 其样本平均值和样本方差分别为:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i) , \quad V^2 = \sum_{i=1}^N x(t_i)^2 - N(\bar{x})^2 . \quad (16)$$

进行周期分析时, 假设试验周期为 P_{test} , 根据分组索引公式:

$$GN = \text{floor} \left[\frac{m(t_i - t_0)}{P_{\text{test}}} - m \cdot \text{floor} \left(\frac{t_i - t_0}{P_{\text{test}}} \right) \right] , \quad (17)$$

可以把数据分为 m 组, 即 $0, 1, 2, \dots, m-1$ 组, 其中 GN 为分组索引数, floor 为取整运算, t_i 为数据对应的时间, t_0 为时间起点。如果数据被划分为 m 组, 则第 l 组的样本平均值和样本方差分别为:

$$\bar{x}_l = \frac{1}{m_l} \sum_{i=1}^{m_l} x(t_i) \quad , \quad V_l^2 = \sum_{i=1}^{m_l} x(t_i)^2 - m_l(\bar{x}_l)^2 \quad . \quad (18)$$

进而可求出 m 组数据的总方差:

$$V_m^2 = \sum_{l=1}^m V_l^2 \quad . \quad (19)$$

根据统计理论, 可得 V_m^2 和 V^2 存在如下关系: $V_m^2 < V^2$ 。在周期分析中, m 的取值至关重要, m 越大, 则灵敏度越高, 但会产生较大的高频噪声; 反之周期成分有可能被平滑掉, 从而检测不到周期成分。

此外, Kidger 等人^[26] 在 JK 算法的基础上引进了方差分式, 并给出了判断周期真实性的方法, 即:

$$\eta = \frac{1 - V_m^2}{V_m^2} \quad , \quad (20)$$

其中, V_m^2 为归一化后的数值。在归一化图中, 若 $V_m^2 = 1$, 即 $\eta = 0$, 则不存在周期; 当 $\eta \geq 0.5$ 时, 表示存在很强周期; 当 $\eta \leq 0.25$ 时, 若存在周期, 则该周期成分也表现为弱周期形式。进一步的检测是关于极小值大小和接近于所采纳周期的 V_m^2 曲线的“平滑段”的噪声关系。如果“平滑段”的极小值的相对变化绝对值比“平滑段”的标准差大很多, 那么信号的周期性可认为是具有显著性的, 并且极小值是非常可信的^[26]。

2.2.2 状态弥散最小化算法

1978 年, Stellingwerf 提出了基于时间序列自身统计特性的状态弥散最小化 (Phase Dispersion Minimization, PDM) 算法^[12]。它所基于的数学思想是: 信号中相邻两个数据点之间的相位值和幅度值具有一定的相关性, 对真实的周期而言, 它的相关性大; 反之, 对于随机噪声信号, 这种相关性就会明显减小。

对于时间序列 $\{(x(t_i), t_i) | i = 1, 2, 3, \dots, N\}$, 其方差为:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x(t_i) - \bar{x})^2}{N - 1} \quad , \quad (21)$$

其中 \bar{x} 为时间序列的均值, 即 $\bar{x} = \sum x_i / N$ 。假设测试周期为 P_{test} , 则可计算出每个样本的相位矢量:

$$\phi_i = \frac{t_i}{P_{\text{test}}} - \text{floor} \left(\frac{t_i}{P_{\text{test}}} \right) \quad , \quad (22)$$

其中 floor 表示取整运算。

PDM 算法通过放回抽样的方式, 从时间序列 $x(t_i)$ 中抽取 m 个子集 $x_j(t)$, $j = 1, 2, 3, \dots, m$, 每个子集 $x_j(t)$ 包含了 n_j 个数据点。对于第 j 个子集 $x_j(t)$, 其中各个

样本的相位均相等。按公式 (21) 可计算出子集 $x_j(t)$ 的方差 s_j^2 , 进而得到信号的估计方差:

$$s^2 = \frac{\sum (n_j - 1) s_j^2}{\sum n_j - m} . \quad (23)$$

通常来说, 整个相位域 $(0, 1)$ 被分为固定的间隔, 但样本点只要满足选取规定就可以任意筛选。此外, 并不是 $x(t_i)$ 中所有的样本都必须选取, 且一个样本点可以同时属于多个子集之中。将统计变量定义为:

$$\Theta = s^2 / \delta^2 , \quad (24)$$

其中 $\Theta \in [0, 1)$ 。如果 P_{test} 不是真实周期, 则 $s^2 \approx \sigma^2$, $\Theta \approx 1$; 反之, Θ 存在最小极值, 其理想期望值为 0。因此, 可以从 PDM 算法的 Θ - P 分布图中的局部极小值点来识别时间序列中可能存在的周期成分。

2.2.3 结构函数法

1985 年, Simonetti 等人^[13] 提出了一种分析非均匀采样时间序列的信号处理方法——结构函数 (Structure function, SF) 法。当处理非均匀采样时间序列时, 它无需对数据进行插值处理, 且不需要预先定义函数形式, 最终结果也不存在频谱混叠等问题, 而是能够直接从时域中获取光变过程的特征, 因此得到了较广泛的应用。对于非均匀采样时间序列 $x(t_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, 其一阶结构函数的定义为:

$$D^{(1)}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x(t_i) - x(t_i + \tau)]^2 , \quad (25)$$

其中 τ 为时间延迟。

在对数空间中, 理想结构函数如图 1 所示, 它由两个平台及它们之间的斜坡组成, 横轴表示时间延迟 τ 的对数, 纵轴表示结构函数 $D(\tau)$ 的对数。从左往右第一个平台的 $D(\tau)$ 值大约是测量误差标准偏差的两倍 ($2\sigma_{\text{noise}}^2$), 主要由测量误差造成; 第二个平台的 $D(\tau)$ 值大约为观测数据标准偏差的两倍 ($2\sigma_{\text{signal}}^2$), 对应的 τ 值为最短光变时标。此外, 函数的斜率 α 表现了光变的特征, 并由此揭示其内在过程^[27]。斜率 $\alpha = 1$ 的坡度意味着红噪声, 斜率 α 接近于 0 的斜坡则意味着白噪声, 通常的光变曲线都夹杂着红白噪声, 因此斜率 α 通常在 $0 \sim 1$ 之间。1993 年, Smith 等人^[28] 给出一个最简单的周期辨别方法: 如果非均匀采样时间序列中存在光变周期 τ_p , 那么 $D(\tau)$ 将在 $\tau = \tau_p$ 处出现极小值。

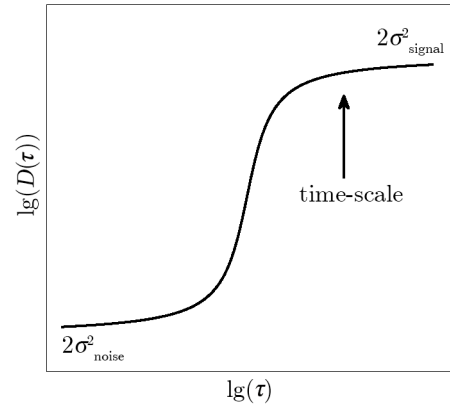


图 1 理想结构函数图

2.2.4 离散相关函数法

离散相关函数 (Discrete Correlation Function, DCF) 法最早由 Edelson 等人^[14] 引入, 用于研究具有时延的时间序列之间的相关性, 但它同样可以用来对单一时间序列进行周期

分析。最初的互相关函数 (Cross-Correlation Function, CCF)^[15, 29] 是由 Blandford 和 McKee 提出用来提取时间序列中的相关信息的。对于两时间序列 $a(t)$ 和 $b(t)$, CCF 的定义为:

$$CCF(\tau) = \frac{E[(a(t) - E_a)(b(t + \tau) - E_b)]}{\sigma_a \sigma_b} , \quad (26)$$

其中 $a(t)$ 、 $b(t)$ 分别为两时间序列的幅度, E_a 、 E_b 分别为两时间序列的幅度期望, τ 为两序列之间的时延值, σ_a 、 σ_b 分别为相应的标准差。

然而, Edelson 和 Krolik 是用 DCF 的方法来计算时间序列的 CCF 值^[12]。他们首先对时间序列进行数据配对, 即 $\{a(t_i), b(t_j)\}$, 计算未装箱的离散相关函数值:

$$UDCF_{ij} = \frac{(a(t_i) - \bar{a})(b(t_j) - \bar{b})}{\sigma_a \sigma_b} , \quad (27)$$

\bar{a} 、 \bar{b} 分别为两时间序列的平均值, σ_a 和 σ_b 分别为相应的标准差。对于有噪数据, 可用 $\sqrt{(\sigma_a^2 - e_a^2)(\sigma_b^2 - e_b^2)}$ 代替式 (27) 中的 $\sigma_a \sigma_b$, 假设装箱数为 M , 最小时延和最大时延分别为 τ_{\min} 和 τ_{\max} , $UDCF_{ij}$ 的延时为 $\Delta\tau_{ij} = t_j - t_i$, 则 $UDCF_{ij}$ 被装入第 m 个箱中的条件为:

$$\tau_{\min} + \frac{(m-1)(\tau_{\max} - \tau_{\min})}{M} \leq \Delta\tau_{ij} < \tau_{\min} + \frac{m(\tau_{\max} - \tau_{\min})}{M} . \quad (28)$$

最后使用每个箱的平均值来估计 DCF 值, 箱的标准差用以估计误差值。假设第 m 个箱中有 n 个数据, 则 DCF 的值被定义为:

$$DCF(\tau) = \frac{1}{n} \sum UDCF_{ij} , \quad (29)$$

标准差为:

$$\delta_{DCF(\tau)} = \frac{1}{n-1} \sqrt{\sum [UDCF_{ij} - DCF(\tau)]^2} . \quad (30)$$

在 $DCF(\tau) - \tau$ 图中, 峰值代表可能的周期成分。

2.2.5 Z 变换离散相关函数算法

1997 年, Alexander 在 DCF 算法的基础上引入了 Fisher 变换, 对 DCF 得到的周期进行统计置信度分析, 并将这种方法命名为 Z 变换离散相关函数 (Z-transformed Discrete Correlation Function, ZDCF) 算法^[30]。在该方法中, $CCF(\tau)$ 的值通过相关系数 r 来估算, 即:

$$r = \frac{1}{(N-1)S_a S_b} \sum (a_i - \bar{a})(b_j - \bar{b}) , \quad (31)$$

其中 N 为箱中数据对 $\{a(t_i), b(t_j)\}$ 的数量, 同时也是时延 $t_{ij} = t_i - t_j$ 的个数, \bar{a} 、 \bar{b} 分别为两箱中时间序列的平均值, S_a 、 S_b 分别为两箱中时间序列的标准差, 即:

$$S_a^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a})^2 , \quad S_b^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (b_i - \bar{b})^2 . \quad (32)$$

定义:

$$z = \frac{1}{2} \lg \left[\frac{1+r}{1-r} \right], \quad \zeta = \frac{1}{2} \lg \left[\frac{1+\rho}{1-\rho} \right], \quad r = \tanh z, \quad (33)$$

其中 z 为近似正态分布随机变量, ρ 为箱的总体相关系数。由此可得 z 的均值 \bar{z} 和方差 S_z^2 :

$$\bar{z} = \zeta + \frac{\rho}{2(N-1)} \left[1 + \frac{5+\rho^2}{4(N-1)} + \frac{11+2\rho^2+3\rho^3}{8(N-1)^2} + \dots \right], \quad (34)$$

$$S_z^2 = \frac{1}{N-1} \left[1 + \frac{4-\rho^2}{2(N-1)} + \frac{22-6\rho^2-3\rho^4}{6(N-1)^2} + \dots \right]. \quad (35)$$

为方便计算均值 \bar{z} 和方差 S_z^2 , 拟定 $\rho = r$, 再由 z 空间变换回来, 可得 r 的 σ 误差范围为:

$$\delta = |\tanh(\bar{z}(r) \pm s_z(r)) - r|. \quad (36)$$

由 ZDCF 的 Z 变换转化得到的 r 满足 $|r \pm \delta_{r\pm}| \leq 1$ 。具体的算法实现是: 先根据 τ 列出所有可能的时间序列的组合 $\{a(t_i), b(t_j)\}$, 再进行装箱, 并保证 τ 相隔较小的数据对分在同一个箱子里。

ZDCF 算法的装箱过程为: 先将所有数据对 $\{a(t_i), b(t_j)\}$ 按照时延 t_{ij} 的大小进行排序, 然后再将排序后的数据对进行装箱处理。装箱过程中, 若一新数据对中的 a 和 b 之前已经在该箱中出现, 则舍弃这一新数据对。为了防止时延值非常接近的数据对被装进邻近的箱, 定义一较小参数 ε , 只要时延为 t_{i+1} 的新数据对满足 $t_{i+1} - t_i < \varepsilon$, 这一新的数据对就被装入当前箱中。当进行自相关 (ACF) 运算时, 装箱顺序为从时延 $\tau = 0$ 到 $\tau = \tau_{\max}$; 当进行 CCF 运算时, 装箱先从时延的中间值 τ_m 开始, 即先从 τ_m 到 $\tau = 0$, 再从 τ_m 到 $\tau = \tau_{\max}$, 或者先从 τ_m 到 $\tau = \tau_{\max}$, 再从 τ_m 到 $\tau = 0$ 。这种装箱方法的目的是为了先装入那些密度较大的时延, 因为 ZDCF 中的主要信息包含在两时间序列重叠部分较大的时延处。

2.3 基于时-频域分析的周期提取算法

小波分析是 20 世纪 80 年代中期迅速发展起来的一门新兴学科, 与傅里叶变换的相同之处是: 它们都使用特定的函数族来对信号进行线性表示; 而不同之处在于: 小波变换将信号映射为二维的系数数组, 即将信号从时域变换至时-频域。小波变换在时域和频域都具有较强的局部化能力, 它通过伸缩平移运算对信号 (函数) 逐步进行多尺度细化, 能够在高频处进行时间细分, 在低频处进行频率细分, 达到自适应信号时-频分析的要求, 解决了傅里叶变换不能在时域中局部化分析的难题, 灵活性较高^[31]。

1996 年, Foster^[16] 在离散小波变换 (Discrete Wavelet Transform, DWT) 的基础上提出一种加权小波 Z 变换 (Weighted Wavelet Z-transform, WWZ) 算法, 可直接对非均匀采样时间序列的周期进行检测。该算法将时间序列映射到三个基函数上, 即 $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = \cos(\omega(t - \tau))$, $\varphi_3(t) = \sin(\omega(t - \tau))$, 并在投影上做了统计加权 $\omega_\alpha = \exp(-c\omega^2(t_\alpha - \tau)^2)$, 将数据采样的不均匀性通过权重加以调节, 避免周期分析受到采样过密的数据段的影响, 其中使用的母小波为 Morlet 小波, WWZ 的定义为:

$$WWZ = \frac{(N_{\text{eff}} - 3)V_y}{2(V_x - V_y)}, \quad (37)$$

且满足自由度为 $N_{\text{eff}} - 3$ 和 2 的 F 分布。上式中 N_{eff} 为有效数据点数, V_x 和 V_y 分别为观测数据和模拟函数的加权变量, 具体定义分别如下:

$$N_{\text{eff}} = \frac{\left(\sum \omega_\alpha\right)^2}{\sum \omega_\alpha^2} = \frac{\left[\sum e^{-2c\omega^2(t_\alpha-\tau)^2}\right]^2}{\sum e^{-2c\omega^2(t-\tau)^2}} = \frac{n^2(\omega, \tau)}{n(\sqrt{2}\omega, \tau)}, \quad (38)$$

$$V_x = \frac{\sum w_\alpha x^2(t_\alpha)}{\sum_\lambda w_\lambda} - \left[\frac{\sum_\alpha w_\alpha x(t_\alpha)}{\sum_\lambda w_\lambda}\right]^2 = \langle x|x \rangle - \langle 1|x \rangle^2, \quad (39)$$

$$V_y = \frac{\sum w_\alpha y^2(t_\alpha)}{\sum_\lambda w_\lambda} - \left[\frac{\sum_\alpha w_\alpha y(t_\alpha)}{\sum_\lambda w_\lambda}\right]^2 = \langle y|y \rangle - \langle 1|y \rangle^2, \quad (40)$$

其中 c 为衰减因子, τ 为时移, ω 为尺度因子, λ 对应于测试频率。

3 光变周期提取算法的应用

3.1 NGC 5408 X-1 的 X 射线光变分析

NGC 5408 X-1 是少数超亮 X 射线源 (Ultra-Luminous X-ray source, ULX) 之一, 具有明显的 X 射线流量的变化^[32]。而关于该系统中的黑洞到底是不是中等质量黑洞 (Intermediate Mass Black Holes, IMBH) 的问题一直存在争议。早在 2009 年, Strohmayer^[33] 通过分析 NGC 5408 X-1 约 500 d 的 Swift/RXT 数据得到了约 115 d 的光变周期, 并认为该周期成分与系统的轨道运动有关, 即很有可能是该双星系统的轨道周期。如果该假设成立, 通过计算得到的该系统中的黑洞质量恰好处于 IMBH 的质量范围之内^[33]。2010 年, Foster^[34] 通过分析后发现约 115 d 的周期并非系统的轨道周期, 而是一个超轨道周期。紧接着, Middleton^[35] 更是认为该系统中并不存在 IMBH; Cseh^[36] 通过观测 He II 4686 的周期性移动, 估算并得到黑洞质量 (M 约小于 $510 M_\odot$), 也很好证实了 Middleton^[35] 的观点。2012 年, Han^[37] 通过 WWZ 算法对 Strohmayer^[33] 所使用的数据进行分析, 得到了约 115 d 和约 210 d 的光变周期, 并通过置信度分析原理和 CLEANest 算法证明约 210 d 的周期实际为一个伪周期成分。2013 年, Grise^[38] 结合最新的观测数据发现约 115 d 的周期成分并不稳定, 同时还检测到两个新的周期成分 (约 2.6 d 和约 189 d)。图 2 为目前为止最全的 NGC 5408 X-1 的 Swift/XRT 光变数据 (数据来源和预处理参见 Grise13, Pasham13), 横坐标为修正儒略日 (Modified Julian Date, MJD), 单位是 d, 为了方便显示, 同时减去 50 000 d, 纵坐标为计数率 (count rate), 单位是 s^{-1} , 其中数据点总共有 311 个, 时间跨度约为 4.2 a。

NGC 5408 X-1 的 Swift/XRT 光变曲线拥有诸如非均匀采样、多周期、大时间间隔等特性, 对用于检验算法的多周期提取能力、准确度等指标而言, 是一个极好的测试样本。我们将基于频域分析的 LS、DCDFT、CLEANest、GLS 算法, 基于时域分析的 JK、PDM、SF、DCF

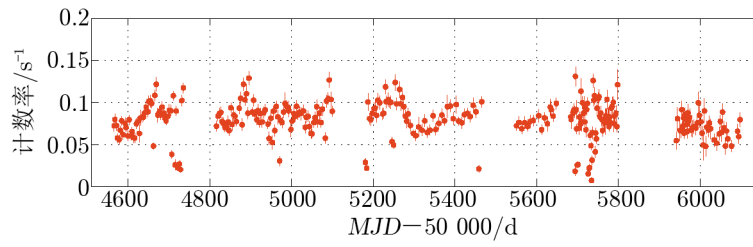


图 2 NGC 5408 X-1 的 Swift/XRT 光变曲线 [38, 39]

和 ZDCF 算法, 及基于时-频域分析的 WWZ 算法应用到上述光变曲线中, 结果如图 3、4 和 5 所示。

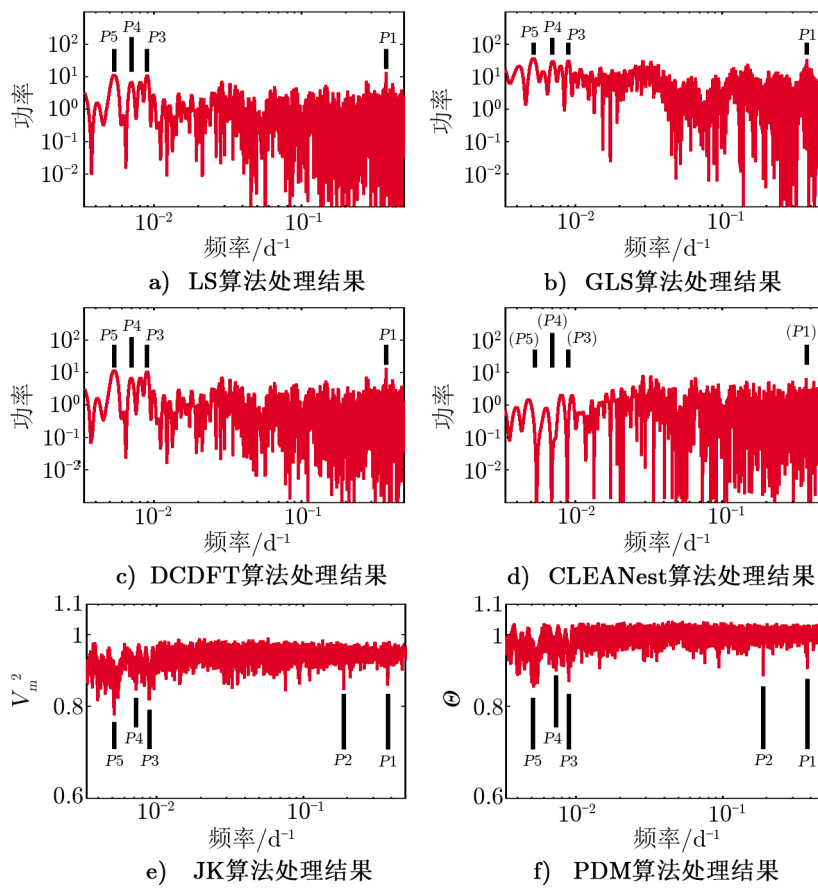


图 3 NGC 5408 X-1 的周期分析结果图

(1) 图 3 a) 为 NGC 5408 X-1 的 LS 功率谱图, 横坐标为频率 (d^{-1}), 检测范围为 $1/300 \sim 1/2 d^{-1}$, 纵坐标为功率, 谱峰代表检测到的周期成分。图中使用黑色短棒分别

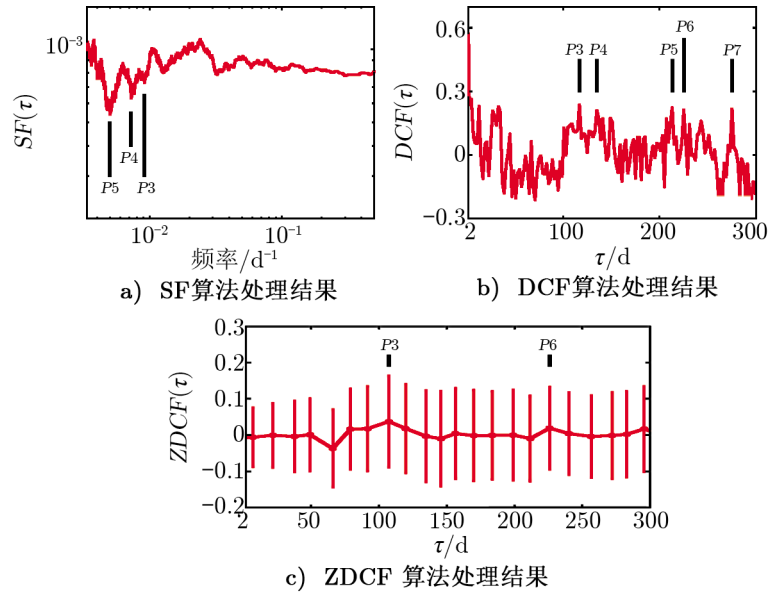


图 4 NGC 5408 X-1 的周期分析结果图

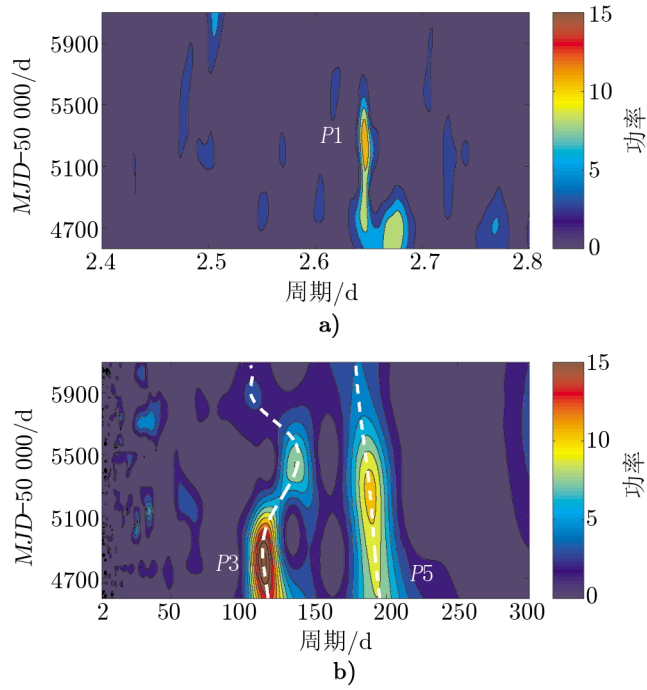


图 5 NGC 5408 X-1 的 WWZ 功率图

- 标注出 4 个明显周期成分, 分别为 $P1 = 2.65 \text{ d}$ ($f_1=0.378 \text{ d}^{-1}$)、 $P3 = 112.4 \text{ d}$ ($f_3=0.0089 \text{ d}^{-1}$)、 $P4 = 142.9 \text{ d}$ ($f_4=0.007 \text{ d}^{-1}$) 和 $P5 = 188.7 \text{ d}$ ($f_5=0.0053 \text{ d}^{-1}$), 功率值分别为 13.32、11.05、6.93 和 11.61。
- (2) 图 3 b) 为 NGC 5408 X-1 的 GLS 功率谱图, 横坐标为频率 (d^{-1}), 检测范围为 $1/300 \sim 1/2 \text{ d}^{-1}$, 纵坐标为功率, 谱峰代表检测到的周期成分。虽然 GLS 算法在计算过程中引入了误差量的考虑, 但对主要的周期成分 ($P1$ 、 $P2$ 和 $P3$) 的检测影响并不大, 只是谱峰的功率值增大了不少, 但却使得在 LS 功率谱中比较平坦的部分产生了几处较强的谱峰。图中最强的 3 个周期成分分别为 $P1 = 2.65 \text{ d}$ ($f_1=0.378 \text{ d}^{-1}$)、 $P3 = 111.1 \text{ d}$ ($f_3=0.009 \text{ d}^{-1}$)、 $P4 = 142.9 \text{ d}$ ($f_4=0.007 \text{ d}^{-1}$) 和 $P5 = 192.3 \text{ d}$ ($f_5=0.0052 \text{ d}^{-1}$), 功率值分别为 33.19、31.45、30.9 和 37.65。
- (3) 图 3 c) 为 NGC 5408 X-1 的 DCDFDT 功率谱图, 横坐标为频率 (d^{-1}), 检测范围为 $1/300 \sim 1/2 \text{ d}^{-1}$, 纵坐标为功率, 谱峰代表检测到的周期成分。图中使用黑色短棒分别标注出 3 个明显周期成分, 分别为 $P1 = 2.65 \text{ d}$ ($f_1=0.378 \text{ d}^{-1}$)、 $P3 = 112.4 \text{ d}$ ($f_3=0.0089 \text{ d}^{-1}$)、 $P4 = 142.9 \text{ d}$ ($f_4=0.007 \text{ d}^{-1}$) 和 $P5 = 188.7 \text{ d}$ ($f_5=0.0053 \text{ d}^{-1}$), 功率值分别为 13.14、10.97、6.91 和 11.72。
- (4) 图 3 d) 为从 NGC 5408 X-1 的 DCDFDT 功率谱中剔除 $P1$ 、 $P3$ 、 $P4$ 和 $P5$ 成分后所得的 CLEANest 功率谱图, 横坐标为频率 (d^{-1}), 周期检测范围为 $1/300 \sim 1/2 \text{ d}^{-1}$, 纵坐标为功率, 谱峰代表检测到的周期成分。从图中可以明显看出, 在剔除 4 个主要成分 ($P1$ 、 $P3$ 、 $P4$ 和 $P5$) 之后, 残余谱中不存在明显的周期成分。
- (5) 图 3 e) 为 NGC 5408 X-1 的 JK 算法处理结果图, 横坐标为频率 (d^{-1}), 检测范围为 $1/300 \sim 1/2 \text{ d}^{-1}$, 纵坐标为 V_m^2 , 极小值代表检测到的周期成分, 从图中可以看出 5 个明显的周期成分被检测到, 分别为 $P1 = 2.65 \text{ d}$ ($f_1=0.3781 \text{ d}^{-1}$)、 $P2 = 5.29 \text{ d}$ ($f_2=0.184 \text{ d}^{-1}$)、 $P3 = 112.4 \text{ d}$ ($f_3=0.0089 \text{ d}^{-1}$)、 $P4 = 138.4 \text{ d}$ ($f_4=0.0072 \text{ d}^{-1}$) 和 $P5 = 196.1 \text{ d}$ ($f_5=0.0051 \text{ d}^{-1}$), V_m^2 值分别为 0.86、0.84、0.82、0.84 和 0.78, 其中 $P2 \approx 2 \times P1$ 。
- (6) 图 3 f) 为 NGC 5408 X-1 的 PDM 算法处理结果图, 横坐标为频率 (d^{-1}), 检测范围为 $1/300 \sim 1/2 \text{ d}^{-1}$, 纵坐标为 Θ , 极小值代表检测到的周期成分, 从图中可以看出 3 个明显的周期成分被检测到, 分别为 $P1 = 2.65 \text{ d}$ ($f_1=0.3774 \text{ d}^{-1}$)、 $P2 = 5.29 \text{ d}$ ($f_2=0.189 \text{ d}^{-1}$)、 $P3 = 112.4 \text{ d}$ ($f_3=0.0089 \text{ d}^{-1}$)、 $P4 = 137.0 \text{ d}$ ($f_4=0.0073 \text{ d}^{-1}$) 和 $P5 = 196.1 \text{ d}$ ($f_5=0.0051 \text{ d}^{-1}$), V_m^2 值分别为 0.90、0.88、0.87、0.89 和 0.85, 其中 $P2 \approx 2 \times P1$ 。
- (7) 图 4 a) 为 NGC 5408 X-1 的 SF 算法处理结果图, τ 为时延 (d), 横坐标为 $1/\tau$ (d^{-1}), 检测范围为 $1/300 \sim 1/2 \text{ d}^{-1}$, 纵坐标为 $SF(\tau)$, 极小值代表检测到的周期成分, 从图中可以看出 3 个明显的周期成分被检测到, 分别为 $P3 = 108.7 \text{ d}$ ($f_3=0.0092 \text{ d}^{-1}$)、 $P4 = 138.9 \text{ d}$ ($f_4=0.0072 \text{ d}^{-1}$) 和 $P5 = 200.0 \text{ d}$ ($f_5=0.005 \text{ d}^{-1}$), $SF(\tau)$ 值分别为 7.4×10^4 、 6.3×10^4 和 5.4×10^4 。
- (8) 图 4 b) 为 NGC 5408 X-1 的离散相关函数图, 横坐标为时延 τ (d), 检测范围为

2 ~ 300 d, 纵坐标为 $DCF(\tau)$, 谱峰代表检测到的周期成分, 从图中可以看出 5 个明显的周期成分被检测到, 分别为 $P3 = 117.0 \text{ d}$ ($f_3=0.0085 \text{ d}^{-1}$)、 $P4 = 135.0 \text{ d}$ ($f_4=0.0074 \text{ d}^{-1}$)、 $P5 = 213.0 \text{ d}$ ($f_5=0.0047 \text{ d}^{-1}$)、 $P6 = 225.0 \text{ d}$ ($f_6=0.0044 \text{ d}^{-1}$) 和 $P7 = 275.0 \text{ d}$ ($f_7=0.0036 \text{ d}^{-1}$), $DCF(\tau)$ 值分别为 0.238、0.211、0.223、0.214 和 0.218。其中 $P6 \approx 2 \times P3$ 、 $P7 \approx 2 \times P4$ 。

- (9) 图 4 c) 为 NGC 5408 X-1 的 Z 变换离散相关函数图, 横坐标为时延 τ (d), 检测范围为 2 ~ 300 d, 纵坐标为 $ZDCF(\tau)$, 谱峰代表检测到的周期, 从图中可以看出 2 个比较明显的周期成分, 分别为 $P3 = 107.3 \text{ d}$ ($f_3=0.0093 \text{ d}^{-1}$) 和 $P6 = 225.9 \text{ d}$ ($f_6=0.0044 \text{ d}^{-1}$), $ZDCF(\tau)$ 值分别为 0.037 和 0.019, 其中 $P6 \approx 2 \times P3$ 。
- (10) 由 2.3 节可知, 衰减系数 c 的大小决定了频率检测窗的宽度。为了能最真实地还原各周期成分的大小和趋势, 我们分别使用不同的衰减参数 c 和周期检测范围对 NGC 5408 X-1 的 Swift/XRT 光变数据进行处理, 小波分析得到的结果如图 5 所示。其中图 5 a) 的周期检测范围为 2.4~2.8 d ($c = 0.0000025$), 图 5 b) 的为 2~300 d ($c = 0.003$)。图 5 a) 和 5 b) 均为 WWZ 功率谱的三维等高值图, 其中横坐标 X 为检测周期 (d), 纵坐标 Y 为 NGC 5408 X-1 的观测时间 (d), Z 坐标代表各点的功率值, 颜色越深红代表功率值越高, 功率值高的地方对应的 X 轴坐标代表检测到的周期值。图 5 a) 中, 在观测时间的初期, 可以明显看到一个约 2.67 d 的周期成分, 但随后该成分即发生了“分岔”, 成为 2.65 d 和 2.68 d 的周期成分, 小波功率谱中这种“分岔”情况并不罕见, 在如基因序列、电力系统等非线性动力学系统中非常普遍。 $MJD \approx 54870$ 之后, 2.68 d 的周期成分逐渐变弱并消失。相反地, 2.65 d 的周期成分则越来越显著, 直至 $MJD \approx 55500$, 它才逐渐减弱并消失。与此同时, 出现了一个约 2.50 d 的周期, 该成分一直延伸到了观测末期。约 2.50 d 的周期成分很可能是约 2.65 d 的周期成分发生了周期的漂移而产生的, 具体原因有待进一步考究。在图 5 b) 中可以明显看到 2 个周期成分, 即 $P3 = 115.4 \text{ d}$ ($f_3=8.666 \times 10^{-3} \text{ d}^{-1}$) 和 $P5 = 189.1 \text{ d}$ ($f_5=5.288 \times 10^{-3} \text{ d}^{-1}$)。 $P3$ 周期成分在观测初期非常稳定显著, 但在 $MJD \approx 55200$ 之后发生了明显的变化, 如图中白色虚线所示: $P3$ 逐渐变大并达到了约 136 d, 在 $MJD \approx 55750$ 之后, $P3$ 又重新回到了约 115 d。 $P5$ 成分虽然贯穿整个观测时间 (如白色虚线所示), 但呈现出衰减的趋势, 即从开始的约 193 d 平稳地衰减到最后的约 181 d。

表 1 为上述 10 种算法从 NGC 5408 X-1 的 Swift/XRT 光变曲线中提取到的周期成分。从表中可以得知, 所有算法都检测到约 115 d 的周期成分; 除了 ZDCF 算法, 其他算法还检测到约 136 d 和约 189 d 的周期成分。此外, 基于频域、时-频域和基于时域的 JK 和 PDM 算法还检测到了一个小周期成分, 即 $P1 \approx 2.65 \text{ d}$ (JK 和 PDM 还额外检测到了 $P1$ 的倍周期成分, 即 $P2$)。在基于时域的 SF、DCF 和 ZDCF 算法中, 所有算法都检测到了约 115 d 的周期成分 ($P3$), 但由于算法原理不同, 所得到的结果都存在不同程度的偏差。除了 JK 和 PDM 检测到的 $P2$, 基于时域的其他算法也检测到了一些倍周期成分, 如 DCF 检测到的 $P6$ 和 $P7$ 成分, ZDCF 检测到的 $P6$ 成分。除此之外, 几乎所有的时域和频域算法都检测到了 $P4 \approx 136 \text{ d}$ 的周期成分。

表 1 NGC 5408 X-1 光变周期提取结果

单位: d

No.	LS	GLS	DCDFT	CLEANest	JK	PDM	SF	DCF	ZDCF	WWZ
<i>P1</i>	2.65	2.65	2.65	2.65	2.65	2.65	—	—	—	2.65
<i>P2</i>	—	—	—	—	5.29	5.29	—	—	—	—
<i>P3</i>	112.4	111.1	112.4	112.4	112.4	112.4	108.7	117.0	107.3	115.4
<i>P4</i>	142.9	142.9	142.9	142.9	138.4	136.3	138.2	135.0	—	136.4
<i>P5</i>	188.7	192.3	188.7	188.7	196.1	196.1	200.0	213.0	—	189.1
<i>P6</i>	—	—	—	—	—	—	—	225.0	225.9	—
<i>P7</i>	—	—	—	—	—	—	—	275.0	—	—

注: *P1* 信号的周期相当稳定, 变化幅度在 0.01 d 以内; 其他两个持续的强信号 *P3* 和 *P5* 呈现出随时间变换的观测特征, 变化幅度在 10% 左右。

4 算法性能分析及优缺点比较

通过对上述 10 种算法的原理进行分析和周期检测结果, 可对基于频域、时域和时-频域的周期提取算法进行优缺点分析。

4.1 基于频域分析的周期提取算法的优缺点

基于频域分析的周期提取算法优点主要有 4 点, 表现如下:

- (1) 搭建了从时域分析到频域分析的桥梁, 一些信号特征在时域中很难被检测到, 但在频域中则很容易被“挖掘”出来;
- (2) 对于存在多周期成分的时间序列, 基于频域的分析方法存在明显的提取优势;
- (3) 不需要对时间序列进行插值处理;
- (4) CLEANest 算法能够识别旁瓣效应造成的虚假谱峰。

与此同时, 它们也存在以下几方面的不足:

- (1) 在对存在大时间间隔的非均匀时间序列进行分析时, 易产生谐波干扰、频谱混叠等现象, 使功率谱中出现大量的虚假谱峰, 如 LS 算法在对具有多周期特征的时间序列进行分析时, 功率谱中很容易产生明显的虚假谱峰;
- (2) 时间序列中数据点较少、时间跨度较大时, 功率谱的频率分辨率低, 可靠周期范围窄;
- (3) 处理正弦型时间序列时能达到最佳的效果, 但处理非正弦型时间序列时存在不稳定性, 会产生一定的计算误差, 有时甚至出现无法检测到的情况。

4.2 基于时域分析的周期提取算法的优缺点

基于时域分析的周期提取算法的优点主要有 5 点, 表现为:

- (1) 不存在传统傅里叶分析方法中的窗口、频谱混叠等问题;
- (2) 需要预先定义参数较少;
- (3) 由于主要是从时间序列自身的统计特性出发, 因此不需要使用试验函数来模拟数据, 对时间序列的非均匀性适应性强;
- (4) 在分析数据点较少、包含有非正弦周期信号成分的时间序列时具有明显的优势;

(5) 计算速度快, 实现简单。

然而, 基于时域分析的方法也有其自身的不足之处, 主要表现为:

(1) 检测局限于时域中, 缺乏对频域中隐藏信息的挖掘能力;

(2) 当时间序列中存在多周期信号成分时, 统计学方法的分析结果往往是复杂而混乱的, 很难将各周期成分分离出来;

(3) 算法对数据误差和噪声比较敏感, 导致计算结果误差;

(4) 部分算法对参数过于敏感, 使得处理结果差别很大;

(5) 倍周期成分的出现会扰乱其它周期成分的检测;

(6) 由于原始数据长度有限, 对分析结果会造成影响。

4.3 基于时-频域分析的周期提取算法的优缺点

基于时-频域分析的周期提取算法的优点主要有 3 点, 表现如下:

(1) 将时间序列从时域移至时-频域进行分析, 不仅克服了频谱分析的单一性, 同时可以从时域上确定周期随时间变化的情况;

(2) WWZ 算法非常有利于检测瞬变的、复杂的周期信号;

(3) WWZ 算法频域和时域分析方法不同, 当时-频窗在高频时它会自动变窄变高, 而在低频时又自动变宽变低, 具有“聚焦”功能。

虽然基于时-频域的算法有很大优势, 但不可避免地, 它们同样存在不足:

(1) 算法处理过程所消耗时间相对较长, 实现过程也比较复杂, 得到的结果数据量也比较大;

(2) 对于虚假谱峰的产生仍然不可避免;

(3) 对于非正弦型信号的检测存在不稳定性。

综上所述, 每种算法都拥有各自的优势, 同时也存在各自的短板。因此, 在对时间序列进行处理之前, 我们需要对其特点进行各方面的分析, 如时间序列数据点的多少、最小采样间隔的大小、是否存在很大的时间间隔等, 进而根据序列的自身特点来选取适合的算法对其进行处理。

5 总结与展望

从光变分析的概念、研究现状和科学意义出发, 论述了 10 种周期提取算法的原理, 包括基于频域分析的 LS 算法、DCDFT 算法、CLEANest 算法和 GLS 算法, 基于时域分析的 JK 算法、PDM 算法、SF 算法、DCF 算法和 ZDCF 算法, 及基于时-频域的 WWZ 算法。并将 10 种算法应用到 NGC 5408 X-1 的 X 射线光变分析中, 然后根据周期提取结果和算法原理对算法性能等方面的优缺点进行分析, 得到如下结论。

(1) 基于时-频域分析的算法综合性最好

WWZ 算法是基于时-频域分析算法中的一个典型代表, 它的时-频窗在高频时会自动变窄变高, 而在低频时又自动变宽变低的“聚焦”功能, 是分析瞬变的、非平稳

的时变信号的一个有利工具^[40]。除此之外, 其将时间序列从时域移至时-频域进行分析, 不仅克服了频谱分析的单一性, 并且从时域上我们可以确定周期的起始时间和终止时间, 无疑这对研究现象背后的物理机制是有意义的。虽然它实现过程相对复杂, 数据量也相对较大, 但在当今科技发展水平下已不是什么大问题。

(2) 运用多算法交叉验证周期信号

文中介绍了多种算法, 并使用这些算法对一些光变信号进行了周期提取, 最终大部分算法都可以得到某些相同的周期成分, 有些特殊的算法还得到了一些独有的周期成分, 如 3.1 节中所有算法都检测到了约 115 d 的周期, 但只有部分算法才检测到了 2.65 d、136 d 和 188 d 的周期。由此可见, 从多算法角度共同验证某一周期的存在, 将使这一周期成分更加可信。

(3) 通过实践总结出一套比较有效的周期检测步骤

- 1) 首先使用基于频域的 LS 算法进行周期提取;
- 2) CLEANest 算法用于检验周期成分是否为伪周期;
- 3) 使用基于时域的 JK 算法或 PDM 算法进行周期检测, 看看是否存在未被检测到的非正弦型周期信号;
- 4) 再使用 WWZ 算法对数据进行处理, 分析周期成分在时-频域上的分布、走势等。

(4) 置信度分析

由于受到采样间隔、红白噪声等因素的影响, 很难保证得到的周期成分都是真实的。这使我们不能不对它们进行置信度的分析。LS 算法自带有置信度分析方法, 但是该分析方法的有效性一直存在争议。因此有必要研究一些更有效的置信度分析方法。

由于每种算法都有各自优点和不足, 到目前为止, 还没有一种算法能够适合任何类型的非均匀采样时间序列的周期分析。对于一些处理效果较好、功能较强大的算法, 它们或许比其他的算法有更多的优势, 但它们也有一定的局限性, 不能作为一种通用的算法处理所有类型的非均匀时间序列。在实际应用中, 需综合考虑各种因素来选择最合适的周期提取算法, 这样得到的分析结果才能更加有效可靠。此外, 置信度分析原理仍是光变分析中的一个短板, 这也是后期需要研究的重点。正因如此, 光变周期提取算法的研究才能生生不息, 也正是这些不足成为了推动该领域发展的动力。

参考文献:

- [1] Remillard R A, McClintock J E. *ARA&A*, 2006, 44: 49
- [2] Ulrich M H, Maraschi L, Urry C M. *ARA&A*, 1997, 35: 445
- [3] Scargle J D. *AJ*, 1982, 263: 835.
- [4] 王俊义, 陆相龙, 安涛, 等. *天文学报*. 2016, 已接收
- [5] Lomb N R. *Ap&SS*, 1976, 39: 447
- [6] Scargle J D. *ApJS*, 1981, 45: 1
- [7] Ferraz-Mello S. *AJ*, 1981, 86: 619
- [8] Roberts D H, Lehar J, Dreher J W. *AJ*, 1987, 93: 968

-
- [9] Foster G. AJ, 1995, 109: 1889
- [10] Zechmeister M, Kurster M. A&A, 2009, 496: 577
- [11] Jurkevich I N. Ap&SS, 1971, 13: 154
- [12] Stellingwerf R F. AJ, 1978, 224: 953
- [13] Simonetti J H, Cordes J M, Heeschen D S. ApJ, 1985, 296: 46
- [14] Edelson R A, Krolik J H. ApJ, 1988, 333: 646
- [15] Alexander T. Astronomical Time Series, 1997, 218: 163
- [16] Foster G. AJ, 1996, 112: 1709
- [17] An T, Baan W A, Wang J Y, et al. MNRAS, 2013, 434: 3487
- [18] Wang J Y, An T, Baan W A, Lu X L. MNRAS, 2014, 443: 58
- [19] Carpenter J M, Hillenbrand L A, Skrutskie M F, et al. AJ, 2001, 121: 3160
- [20] Han X, Wang J, Lin J, et al. IEEE International Conference, WiCOM, 2012, 2012: 1
- [21] Bracewell R. The Fourier Transform and IIS Applications. New York: McGraw-Hill Science, 1965: 6
- [22] Fourier, Joseph J B. Théorie Analytique de la Chaleur, Paris: Chez Firmin Didot, 1982: 1
- [23] Brigham E O, Brigham E O. The fast Fourier transform and its applications. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1988: 11
- [24] 郑居里. 信号与系统. 北京: 高等教育出版社, 1978: 2
- [25] Gilliland R L, Baliunas S L. ApJ, 1987, 314: 766
- [26] Kidger M, Takalo L, Sillanpaa A. A&A, 1992, 264: 32
- [27] Heidt J, Wagner S J. A&A, 1996, 305: 42
- [28] Smith A G, Nair A D, Leacock R J, et al. AJ, 1993, 105: 437
- [29] Blandford R D, McKee C F. ApJ, 1982, 255: 419
- [30] Kendall M G, Stuart A. Applied Statistics, 1973, 2: 1
- [31] 成礼智, 王红霞, 罗永. 小波的理论与应用. 北京: 北京大学出版社, 2004: 1
- [32] Karachentsev I D, et al. A&A, 2002, 385: 21
- [33] Strohmayer T E. ApJL, 2009, 706: 210
- [34] Foster D L, Charles P A, Holley-Bockelmann K. ApJ, 2010, 725: 2480
- [35] Middleton M J, Roberts T P, Done C, Jackson F E. MNRAS, 2011, 411: 644
- [36] Cseh D, Grise F, Kaaret P, et al. MNRAS, 2013, 435: 2896
- [37] Han X, An T, Wang J Y, Lin J M, et al. Research in Astronomy and Astrophysics, 2012, 12: 1597
- [38] Grise L F, Kaaret P, Corbel S, Cseh D, Feng H. MNRAS, 2013, 433: 1023
- [39] Pasham D R, Strohmayer T E. ApJ, 2013, 764: 93
- [40] Daubechies I, Bates B J. Acoustical Society of America Journal, 1993, 93: 1671

Review of Periodicity Searching Algorithms of Astronomical Light Curves

AN Tao^{1,3}, WANG Jun-yi², LU Xiang-long^{2,1}, LAO Bao-qiang¹,
WEI Yan-heng¹, DONG Dian-qiao^{2,1}, LU Yang¹, WU Xiao-cong¹

(1. Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China; 2. Key Laboratory of Cognitive Radio and Information Processing, University of Electronic Technology, Guilin 541004, China; 3. Key Laboratory of Radio Astronomy, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008, China)

Abstract: In astronomy, large amounts of light curve data have been accumulated as the development of increasing number of survey projects. The research of those light curve data is vital as they carry plenty of information about many important physical parameters. The study on the variability of light curve, for example, is very helpful for understanding the physical mechanism of light curves, forecasting outbursts, estimating celestial object mass and so on. Traditional variability study based on Fourier transform works well for time series data that are equally spaced in time, while that is not necessarily the case for light curve data since they are usually unevenly sampled due to various factors such as the dynamics of celestial objects, observational and instrumental condition and so on. Besides, light curve data are normally affected by noise to various extent. Therefore, algorithms based on uneven sampling ought to be explored and applied for the study of light curves. This paper summarizes the three types of numerical techniques for identifying periodicity of light curves in frequency domain, time domain and time-frequency domain, which mainly includes Lomb-Scargle periodogram, Jurkevich method, Weighted Wavelet Z Transformation, and so on. The performance of those algorithms is analyzed and the advantages and drawbacks of each of them are reviewed. A conclusion and discussion is provided in the end based on the analysis and comparison of the above algorithms.

Key words: unevenly spaced time series; periodicity; frequency-domain; time-domain; time-frequency domain