

文章编号: 1000-8349(2011)04-459-11

# 宇宙速度场两点相关的暗晕模型描述

曹 亮<sup>1,2</sup>

(1. 中国科学院上海天文台, 星系与宇宙学重点实验室, 上海 200030; 2. 中国科学院 研究生院, 北京 100049)

**摘要:** 利用当前宇宙大尺度结构和星系形成领域流行的暗晕模型, 对宇宙速度场两点相关函数进行精确的描述。暗晕模型能给出宇宙速度场无论是在线性还是非线性尺度上的估计, 而且, 模型中考虑了暗晕之间的相对运动, 从而解决了在大尺度上模型的预言结果和数值模拟样本统计结果之间不自洽的矛盾。结合暗晕占据数模型, 还可以把模型推广到描述星系本动速度两点相关函数上, 这无疑给通过星系本动速度来对宇宙大尺度结构和星系形成及演化进行限制方面的研究提供了一个强大的工具, 并指出了可能的努力方向。

**关 键 词:** 星系本动速度; 暗晕模型; 暗晕占据数模型

**中图分类号:** P159.5      **文献标识码:** A

## 1 引 言

利用星系的分布作为宇宙物质密度分布的探针, 通过对大样本星系红移巡天的统计研究, 探讨宇宙大尺度结构、星系形成和演化以及与此相关的物理定律, 已成为 21 世纪天体物理学重大问题, 同时也是现在及未来宇宙学研究领域的主流方向<sup>[1, 2]</sup>。然而, 宇宙物质密度由暗物质和暗能量占主导, 可观测的重子物质上限仅占宇宙物质密度的约 4%, 而且, 还有大部分的星系际介质是没法直接观测到的, 即所谓的失踪重子问题<sup>[3]</sup>。所以人们面临的困境是, 要通过远少于 4% 的可观测物质去刻画宇宙整体的情况, 难免以偏概全, 此即星系和暗物质之间的偏袒问题。

走出该困境的出路之一便是通过星系速度场的统计特性来了解宇宙物质密度的分布特性。因为星系本动速度和宇宙中物质密度涨落密切相关, 因此, 对星系本动速度的研究在宇宙大尺度结构和星系形成及演化中起着举足轻重的作用, 若能精确描述出星系本动速度的统计特性, 那么就可以对宇宙学模型和星系形成过程给出更好的限制<sup>[4-6]</sup>。这种方法的优点是它将不依赖于暗物质和星系之间的偏袒, 而这点在宇宙大尺度结构研究中恰恰是最复杂和最难确定的。

收稿日期: 2011-03-28; 修回日期: 2011-06-08

资助项目: 中国科学院研究生科技创新与社会实践资助专项; 上海天文台青年人才基金

未来很多星系巡天将有望直接测量到星系和星系团的本动速度。对于一个含有本动速度信息的星系红移巡天,目前有很多方法能够提取其所包含的宇宙学信息<sup>[7-9]</sup>,对星系本动速度两点相关函数的测量就是众多手段中的一种<sup>[10]</sup>。

一般情况下,星系本动速度的两点相关函数是一个具有9个分量的张量。但是,由均匀各向同性原理,简化为如下关系<sup>[11]</sup>:

$$\begin{aligned}\Psi_{ij}(r) &= \langle v_i(\mathbf{x})v_j(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \rangle \\ &= \Psi_{\perp}(r)\delta_{ij} + [\Psi_{\parallel}(r) - \Psi_{\perp}(r)]\hat{r}_i\hat{r}_j,\end{aligned}\quad (1)$$

其中,  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $\hat{r} = \mathbf{r}/r$ ,  $\Psi_{\parallel}(r)$ 和 $\Psi_{\perp}(r)$ 分别是两点相关函数平行于和垂直于两个星系连线方向的分量<sup>[12]</sup>。在纯引力的情况下,速度场是无旋的,并且有 $\Psi_{\parallel}(r) = d[r\Psi_{\perp}(r)]/dr$ 。特别地,对于高斯原初条件而言, $\Psi_{\parallel}(r)$ 和 $\Psi_{\perp}(r)$ 可以写成<sup>[11]</sup>:

$$\Psi_{\perp,\parallel}(r) = f(\Omega)^2 H^2 \int dk P(k) K_{\perp,\parallel}(kr), \quad (2)$$

其中, $H$ 为哈勃参量, $f(\Omega)$ 为线性增长因子,对 $\Lambda$ CDM宇宙而言, $f(\Omega) \simeq \Omega^{0.6}$ ,而 $K_{\perp}$ 和 $K_{\parallel}$ 为:

$$K_{\perp} = \frac{j_1(kr)}{kr}, \quad K_{\parallel} = j_0(kr) - 2\frac{j_1(kr)}{kr}. \quad (3)$$

$j_0(kr)$ 和 $j_1(kr)$ 分别为零阶和一阶球贝塞尔函数。

对于宇宙原初高斯场而言, $\Psi_{\perp}$ 和 $\Psi_{\parallel}$ 就包含了宇宙速度场的全部统计特性,通过对 $\Psi_{\perp}$ 和 $\Psi_{\parallel}$ 的分析,原则上就可以对宇宙大尺度结构形成和演化给出强有力的限制。人们早已经进行了很多这方面的尝试和努力,如利用星系团和暗晕的本动速度作为宇宙速度场的探针,来研究他们的统计性质<sup>[10, 13, 14]</sup>。但是这方面的探索留给人们2个至今仍未解决的难题。首先,星系本动速度在小尺度上比较容易精确测量,而对宇宙大尺度结构形成和演化模型的限制,在大尺度上更为合理和有效。其次,在大尺度上,对暗晕本动速度的统计结果表明,其两点相关函数在沿两者连线方向的分量,即 $\Psi_{\parallel}$ ,具有一个很大的负值<sup>[15]</sup>,这个现象用线性理论是无法解释的。关于这点,人们已经初步意识到,这是由星系或暗晕之间的相对运动所引起的<sup>[16]</sup>,但迄今为止还没有一个成熟的模型来对其进行描述。

本文的主要任务就是解决这两方面难题。我们利用当前宇宙大尺度结构和星系形成理论中非常流行的暗晕模型<sup>[17, 18]</sup>,对宇宙本动速度场的统计特性进行刻画。我们将证明,暗晕模型能对宇宙本动速度场无论是在线性尺度还是非线性尺度上的统计特性都有一个很好的刻画。另外,我们还利用暗晕模型,对暗晕之间的相对运动给出精确的描述,并恢复出暗物质本动速度两点相关函数在沿两者连线方向的分量出现负值这一现象,从而可以据此对宇宙本动速度场两点相关函数的统计特性进行修正,以更好地与直接测量结果进行对比。

本文主要由以下几部分组成,在第2章中给出了宇宙速度场两点相关函数统计的暗晕模型描述,在第3章中给出主要的结果及相关的分析,在第4章中结合暗晕占据数模型将结论推广至星系的情形,第5章对本文的总结和相关讨论。特别地,本文中所采用的宇宙学参数来自WMAP卫星第7年的,也就是最新观测数据的结果<sup>1</sup>。

<sup>1</sup> <http://lambda.gsfc.nasa.gov>

## 2 理论模型

### 2.1 暗晕模型简介

在暗晕模型框架下, 假设所有的物质分布在具有一定质量、一定密度轮廓和空间数密度分布的已经位力化的暗晕中。暗物质两点相关函数可以写成如下形式<sup>[9, 18]</sup>:

$$\begin{aligned} \xi(r) \equiv \xi_{1h}(r) + \xi_{2h}(r) = & \int dm \frac{m^2 n(m)}{\bar{\rho}} \frac{\lambda(r|m)}{\bar{\rho}} + \\ & \int dm_i \frac{m_i n(m_i)}{\bar{\rho}} \int dm_j \frac{m_j n(m_j)}{\bar{\rho}} \int d^3 \mathbf{r}_i \int d^3 \mathbf{r}_j \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i | m_i) \rho(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j | m_j) \times \\ & \xi_{hh}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| | m_i, m_j), \end{aligned} \quad (4)$$

$\xi_{1h}(r)$ 和 $\xi_{2h}(r)$ 分别为两点相关函数的1-halo项和2-halo项, 也即2个粒子处于同一个暗晕中和分别处于不同暗晕中的贡献。 $n(m)$ 表示质量为 $m$ 的暗晕的空间数密度分布, 一个广为流传的解析表达就是Press-Schechter形式<sup>[19]</sup>:

$$\frac{m^2 n(m, z)}{\bar{\rho}} \frac{dm}{m} = \nu f(\nu) \frac{d\nu}{\nu}, \quad (5)$$

$\bar{\rho}$ 为平均宇宙背景共动密度, 另外,

$$\nu f(\nu) = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \exp(-\nu/2) \quad \left( \nu \equiv \frac{\delta_{sc}^2(z)}{\sigma^2(m)} \right), \quad (6)$$

$\delta_{sc}(z)$ 为临界密度, 它的含义是, 对于一个在红移 $z$ 时通过球塌缩形成的暗晕, 假设从它的原初条件开始, 利用线性增长理论外推到红移为0时的密度涨落值。显然, 小于这个值的原初涨落都无法通过塌缩在红移 $z$ 时形成暗晕。对于Einstein-de Sitter 宇宙,  $\delta_{sc}(z=0) = 1.686$ , 在其他宇宙学模型下,  $\delta_{sc}$ 和宇宙物质密度 $\Omega_m$ 以及宇宙学常数 $\Omega_\Lambda$ 有微弱的相关性<sup>[20]</sup>。 $\sigma^2(m)$ 是原初密度涨落在平滑尺度 $R = (3m/4\pi\bar{\rho})^{1/3}$ 上, 利用线性理论外推到红移为0时的方差, 用物质密度功率谱的积分表示:

$$\sigma^2(m) \equiv \int \frac{dk}{k} \frac{k^3 P_{lin}(k)}{2\pi^2} |W(kR)|^2, \quad (7)$$

$W(kR)$ 为top-hat平滑窗函数的傅里叶变换,  $W(x)$ 的形式为,

$$W(x) = (3/x^3) [\sin(x) - x \cos(x)]. \quad (8)$$

对于 $\nu f(\nu)$ , 我们在此使用一个更精确的拟合公式, 也即Sheth-Tormen形式<sup>[21]</sup>:

$$\nu f(\nu) = A(p) (1 + (q\nu)^{-p}) \left( \frac{q\nu}{2\pi} \right)^{1/2} \exp(-q\nu/2), \quad (9)$$

其中,  $p \approx 0.3$ ,  $A(p) = [1 + 2^{-p}\Gamma(1/2 - p)/\sqrt{\pi}]^{-1} \approx 0.3222$ ,  $q \approx 0.75$ , 是通过高精度数值模拟拟合得到的。当 $p = 1/2$ 及 $q = 1$ 时, 这个公式又回到了最初的Press-Schechter 形式。

对于暗晕的密度轮廓,我们采用NFW模型<sup>[22]</sup>:

$$\rho(r|m) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)^\alpha [1 + (r/r_s)^\beta]}, \quad (\alpha, \beta) = (1, 2). \quad (10)$$

$\lambda(r|m)$ 为密度轮廓的卷积,对于球对称的暗晕而言, $\lambda(r|m)$ 可以表示成如下形式:

$$\lambda(r|m) \equiv 2\pi \int dx_1 x_1^2 \rho(x_1|m) \int_{-1}^1 d\beta \rho(x_2|m), \quad (11)$$

其中,  $x_2^2 = x_1^2 + r^2 - 2x_1 r \beta$ .

$\xi_{\text{hh}}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| | m_i, m_j)$ 为分别具有质量 $m_i$ 和 $m_j$ 的暗晕的两点相关函数。一般认为,在比暗晕本身尺度大得多的尺度上,暗晕两点相关函数的变化非常缓慢。所以,在大尺度上, $\xi_{\text{hh}}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| | m_i, m_j)$ 可以从对空间位置的积分中分离出,从而对空间的积分就变成了对暗晕密度轮廓的积分和 $\xi_{\text{hh}}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| | m_i, m_j)$ 的卷积,并且两个粒子的距离近似地与它们所在暗晕内部的相对位置无关。因此,在归一化后,对暗晕密度轮廓的积分给出两个Dirac- $\delta$ 函数 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ 和 $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j)$ ,再和 $\xi_{\text{hh}}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| | m_i, m_j)$ 进行卷积,我们就得到 $\xi_{\text{hh}}(r|m_i, m_j)$ ,其中利用了各向同性假设, $r$ 为 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}'$ 之间的距离。

最后,我们还需要一个模型来描述 $\xi_{\text{hh}}(r|m_i, m_j)$ 。我们采用Mo和White在1996年<sup>[23]</sup>以及Sheth和Lemson在1999年<sup>[24]</sup>所提出的方法,引入一个偏袒因子来描述在大尺度上暗晕相对于暗物质的偏袒, $\xi_{\text{hh}}(r) = b^2(m) \xi(r)$ 。而且,在大尺度上,相关函数可以用线性相关函数作很好的近似, $\xi(r) \approx \xi_0(r)$ , $\xi_0(r)$ 是暗物质的线性两点相关函数。所以在大尺度上,我们有,

$$\xi_{\text{hh}}(r|m_1, m_2) \approx b(m_1) b(m_2) \xi_0(r). \quad (12)$$

至此,利用暗晕模型,我们就能精确地描述宇宙物质密度场的两点相关函数,当然,暗晕模型也可以描述任何其他高阶统计,在此暂不作介绍。

## 2.2 暗晕模型在宇宙速度场统计中的应用

暗晕模型在描述宇宙大尺度结构和星系形成及演化方面取得了极大的成功。而且,我们在此仅需要做很少的改进和假设,就能把暗晕模型进行推广,并利用它来对星系或暗物质的相对运动和本动速度相关函数进行描述。

在暗晕模型中,所有暗物质粒子被假定分布在近似球对称的、处于位力化的暗晕中,每个暗物质粒子的速度显然可以分解为主暗晕中心的速度和相对于暗晕中心速度的矢量和<sup>[18]</sup>:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{vir}} + \mathbf{v}_{\text{halo}}, \quad (13)$$

其中,第一项为暗物质粒子相对于暗晕的位力速度,第二项为暗晕本身的速度。我们还假设不同暗物质粒子相对于暗晕的位力速度满足相互独立的高斯分布,其分布特性仅仅依赖于其所在主暗晕的质量<sup>[25]</sup>;而且,暗物质粒子相对于暗晕的位力速度和暗晕本身的速度之间,也是独立的,不论该暗晕是否它的主暗晕;最后,一定质量暗晕本身的速度也服从相互独立的高斯分布,同样,该高斯分布的统计特性仅仅是暗晕质量的函数<sup>[26]</sup>。

有了以上这些假设, 我们就能得出暗物质粒子速度场的所有统计特性。下面详细地逐步叙述这一方法。首先, 对于暗晕本身的速度, 可以采用如下的方法来处理: 由大尺度结构形成理论知道, 宇宙密度场在一定平滑尺度上的涨落若超过临界密度, 就能形成相应质量的暗晕, 暗晕的速度可以近似为该尺度上物质的平滑速度, 利用高斯原初条件, 一定质量暗晕的速度场  $v_{\text{halo}}(m)$  服从高斯分布, 其标准差  $\sigma_{\text{halo}}^2(m)$  可以表示成<sup>[27]</sup>:

$$\sigma_{\text{halo}}(m) = Hf(\Omega)\sigma_{-1}\sqrt{1 - \sigma_0^4/\sigma_1^2\sigma_{-1}^2}, \quad (14)$$

其中,  $\sigma_j$  的定义如下:

$$\sigma_j^2(m) \equiv \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk (k^{2+2j}) P(k) W^2(kR(m)) \quad (15)$$

暗物质粒子本动速度的两点相关函数可以写成  $\langle \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \rangle$ , 如果两个粒子都处于同一个暗晕中, 由公式(13), 对质量为  $m$  的暗晕而言, 那么  $\langle \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \rangle$  可表示成以下形式:

$$\langle \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \rangle = \langle (\mathbf{v}_{\text{vir}, i} + \mathbf{v}_{\text{halo}}) (\mathbf{v}_{\text{vir}, j} + \mathbf{v}_{\text{halo}}) \rangle, \quad (16)$$

由前面的讨论可知,  $\mathbf{v}_{\text{vir}, i}$  和  $\mathbf{v}_{\text{vir}, j}$  之间是不相关的, 而且它们和  $\mathbf{v}_{\text{halo}}$  之间也是不相关的, 此处  $\mathbf{v}_{\text{vir}, i}$  和  $\mathbf{v}_{\text{vir}, j}$  是同一暗晕中 2 个不同粒子相对于该暗晕的位力速度,  $\mathbf{v}_{\text{halo}}$  是这 2 个粒子所在主暗晕的速度。因此显然有,  $\langle \mathbf{v}_{\text{vir}, i} \mathbf{v}_{\text{vir}, j} \rangle = 0$ ,  $\langle \mathbf{v}_{\text{vir}, i} \mathbf{v}_{\text{halo}} \rangle = 0$ ,  $\langle \mathbf{v}_{\text{vir}, j} \mathbf{v}_{\text{halo}} \rangle = 0$ 。因此最后有,  $\langle \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \rangle^{1h}(m) = \langle \mathbf{v}_{\text{halo}}^2(m) \rangle = \sigma_{\text{halo}}^2(m)$ 。

如果两个粒子处于不同的暗晕中, 那么它们的速度两点相关函数为:

$$\langle \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \rangle = \langle (\mathbf{v}_{\text{vir}, i} + \mathbf{v}_{\text{halo}, i}) (\mathbf{v}_{\text{vir}, j} + \mathbf{v}_{\text{halo}, j}) \rangle, \quad (17)$$

同样, 由于  $\mathbf{v}_{\text{vir}, i}$  和  $\mathbf{v}_{\text{vir}, j}$  之间是不相关的, 它们与  $\mathbf{v}_{\text{halo}, i}$  和  $\mathbf{v}_{\text{halo}, j}$  之间也都是不相关的, 此处  $\mathbf{v}_{\text{vir}, i}$  和  $\mathbf{v}_{\text{vir}, j}$  是两个不同暗晕中的粒子相对于各自暗晕的位力速度。类似的, 最后有,  $\langle \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \rangle^{2h}(m_i, m_j) = \langle \mathbf{v}_{\text{halo}}(m_i) \mathbf{v}_{\text{halo}}(m_j) \rangle$ 。

这也就是说, 暗物质粒子速度之间的相关仅仅来自于暗晕本身速度之间的相关, 考虑暗晕速度的两点相关函数, 并将不同质量暗晕的空间数密度和暗晕的大尺度结构分布作为权函数加权后, 再对质量积分, 然后再对所有暗物质粒子对的数目求平均, 我们就得到了暗物质粒子本动速度的两点相关函数。特别地, 暗物质粒子本动速度两点相关函数垂直和平行于两个粒子连线方向的分量可以表示成:

$$\begin{cases} \langle v_i v_j \rangle_{\perp, \parallel}^{1h}(r) = \begin{cases} 2/3 \\ 1/3 \end{cases} \times \frac{1}{1 + \xi(r)} \int \sigma_{\text{halo}}^2(m) \frac{m^2 n(m)}{\bar{\rho}} \frac{\lambda(r|m)}{\bar{\rho}} dm, \\ \langle v_i v_j \rangle_{\perp, \parallel}^{2h}(r) = f^2(\Omega) H^2 \int dm_i \frac{m_i n(m_i)}{\bar{\rho}} \int dm_j \frac{m_j n(m_j)}{\bar{\rho}} \frac{1 + b(m_i) b(m_j) \xi_0(r)}{[1 + \xi(r)]} \Psi_{\perp, \parallel}(m_i, m_j | r) \end{cases}, \quad (18)$$

其中,  $\Psi_{\perp, \parallel}(m_i, m_j | r)$  分别是两个分别具有质量  $m_i$  和  $m_j$  暗晕的本动速度两点相关函数垂直和平行于两者连线方向的分量, 和公式(2)类似, 它们可以表示成:

$$\Psi_{\perp, \parallel}(m_i, m_j | r) = f(\Omega)^2 H^2 \int dk \frac{P(k) W(k|m_i, m_j)}{2\pi^2} K_{\perp, \parallel}(kr). \quad (19)$$

$W(k|m_1, m_2) \equiv [W(kR(m_1))]W[kR(m_2)]$ ,  $W_s$ 是如公式(8)所示窗函数的傅里叶变换。

因为暗晕形成于密度场随机涨落的尖峰(peak)处, 它们的速度弥散要比处于同样平滑尺度上全空间的平均速度弥散略低, 我们假设它的形状不变, 而幅度的差异可以用如下形式来刻画<sup>[9]</sup>:

$$\Psi^{\text{peak}}(m_i, m_j|r) \approx \frac{\sigma_{\text{halo}}(m_i)}{\sigma_{-1}(m_i)} \frac{\sigma_{\text{halo}}(m_j)}{\sigma_{-1}(m_j)} \Psi(m_i, m_j|r). \quad (20)$$

我们的任务到此似乎结束了, 不过这个模型中暂时还没有考虑暗晕之间的相对运动。因此, 公式(20)仍然是不精确的, 这也是导致理论预言与数值模拟样本统计中 $\Psi_{\parallel}(r)$ 出现负值这一现象相矛盾的原因。我们注意到, 速度场并不具有密度场那样的简单累加性质, 暗晕速度场相关函数实际上应该是以暗晕对的数目为权的加权平均。我们考虑质量为 $m_i$ 和 $m_j$ 的暗晕的速度分别为 $\mathbf{v}_i$ 和 $\mathbf{v}_j$ , 且它们所处位置的密度涨落分别为 $\delta_i(\mathbf{x})$ 和 $\delta_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ , 因此, 质量为 $m_i$ 和 $m_j$ 的暗晕数密度分别为 $[1 + b(m_i)\delta_i(\mathbf{x})]n(m_i)$ 和 $[1 + b(m_j)\delta_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})]n(m_j)$ , 其中,  $b(m)$ 为质量为 $m$ 的暗晕相对于暗物质的偏袒,  $n(m)$ 为质量为 $m$ 的暗晕的平均空间数密度。所以, 质量为 $m_i$ 和 $m_j$ 之间的暗晕本动速度的两点相关函数的合理表达应该是<sup>[15, 16]</sup>,

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\perp, \parallel}(m_i, m_j|r) &= \frac{\langle (1 + b(m_i)\delta_i(\mathbf{x}))(1 + b(m_j)\delta_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}))\mathbf{v}_i(\mathbf{x})\mathbf{v}_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle}{\langle (1 + b(m_i)\delta_i)(1 + b(m_j)\delta_j) \rangle} \\ &= \langle \mathbf{v}_i\mathbf{v}_j \rangle + \frac{b_i b_j \langle \delta_i \mathbf{v}_j \rangle \langle \delta_j \mathbf{v}_i \rangle}{1 + b_i b_j \langle \delta_i \delta_j \rangle}, \end{aligned} \quad (21)$$

其中, 最后一步利用了高斯场四阶统计中的Wick理论<sup>[28]</sup>, 对 $\Psi_{\parallel}(m_i, m_j|r)$ 而言, 上式中 $\langle \mathbf{v}_i\mathbf{v}_j \rangle$ 应该和式(20)等价, 而多出来的一项 $b_i b_j \langle \delta_i \mathbf{v}_j \rangle \langle \delta_j \mathbf{v}_i \rangle / (1 + b_i b_j \langle \delta_i \delta_j \rangle)$ 就是由暗晕相对速度引起的, 我们稍后再作详细讨论。但是很容易证明, 对于 $\Psi_{\perp}(m_i, m_j|r)$ 而言, 这项为零。所以, 我们可以总结如下:

$$\langle v_i v_j \rangle_{\perp}^{2h}(r) = \frac{f^2(\Omega)H^2}{2\pi^2} \frac{1}{1 + \xi(r)} \frac{1}{\bar{\rho}^2} [I_1 + \xi_0(r)I_2], \quad (22)$$

其中,  $I_1$ 、 $I_2$ 分别有如下形式:

$$\begin{cases} I_1 = \int dk K_{\perp}(kr) P(k) \left[ \int dm m n(m) \frac{\sigma_{\text{halo}}(m)}{\sigma_{-1}(m)} W[kR(m)] \right]^2, \\ I_2 = \int dk K_{\perp}(kr) P(k) \left[ \int dm m n(m) b(m) \frac{\sigma_{\text{halo}}(m)}{\sigma_{-1}(m)} W[kR(m)] \right]^2. \end{cases} \quad (23)$$

在线性理论下,  $\langle \mathbf{v}_i \delta_j \rangle$ 可以写成<sup>[29]</sup>:

$$\langle \mathbf{v}_i \delta_j \rangle = -\hat{\mathbf{r}} \frac{f(\Omega)H}{2\pi^2} \int dk k P(k) j_1(kr), \quad (24)$$

特别地, 在式(21)中,  $\langle \mathbf{v}_i \delta_j \rangle$ 表示一个具有质量 $m$ 和速度 $\mathbf{v}_i$ 的暗晕朝向一块具有密度涨落为 $\delta_j$ 区域运动的速度, 利用类似于式(24)的处理方法<sup>[29]</sup>,  $\langle \mathbf{v}_i \delta_j \rangle$ 可以写成:

$$\langle \mathbf{v}_i \delta_j \rangle = -\hat{\mathbf{r}} \frac{f(\Omega)H}{2\pi^2} \int dk k P(k) W(kR(m)) \frac{\sigma_{\text{halo}}(m)}{\sigma_{-1}(m)} j_1(kr), \quad (25)$$

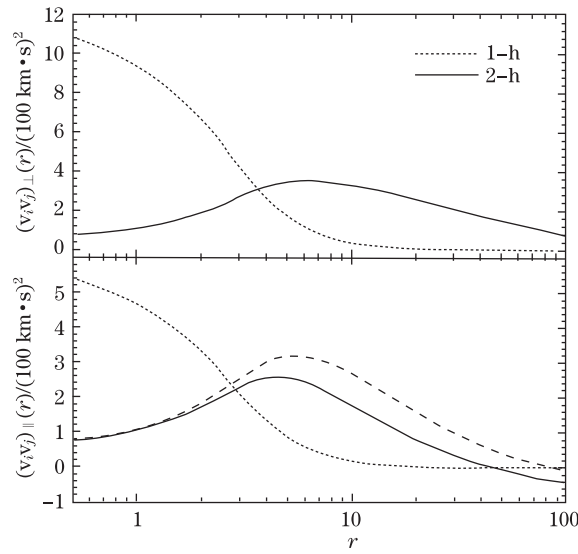


图 1 暗物质速度场两点相关函数的暗晕模型描述

上半图和下半图分别表示两点相关函数在垂直于和平行于两个粒子连线方向上的分量。点线表示1-halo项,即两个粒子处于同一个暗晕中的贡献,实线表示2-halo项,即两个粒子处于不同暗晕中的贡献。下半图中的虚线表示在暗晕本身速度的相关函数 $\Psi_{\parallel}$ 计算时考虑了暗晕之间相对运动的情形。

把通过式(21)和(25)修正的 $\Psi_{\parallel}(m_i, m_j | r)$ 代入到式(18),我们最后得到:

$$\langle v_i v_j \rangle_{\parallel}^{2h}(r) = \frac{f^2(\Omega)H^2}{2\pi^2} \frac{1}{1 + \xi(r)} \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left[ I_1 + \xi_0(r)I_2 - \frac{1}{2\pi^2}I_3 \right], \quad (26)$$

其中,  $I_1$ 、 $I_2$ 和 $I_3$ 分别为,

$$\begin{cases} I_1 = \int dk K_{\parallel}(kr) P(k) \left[ \int dm n(m) \frac{\sigma_{\text{halo}}(m)}{\sigma_{-1}(m)} W[kR(m)] \right]^2 \\ I_2 = \int dk K_{\parallel}(kr) P(k) \left[ \int dm n(m) b(m) \frac{\sigma_{\text{halo}}(m)}{\sigma_{-1}(m)} W[kR(m)] \right]^2 \\ I_3 = \int dk j_1(kr) k P(k) \left[ \int dm n(m) b(m) \frac{\sigma_{\text{halo}}(m)}{\sigma_{-1}(m)} W[kR(m)] \right]^2 \end{cases}. \quad (27)$$

以上式(22)、(23), 和(26)、(27)就是我们利用暗晕模型对暗物质速度场两点相关函数的精确描述, 接下来我们给出相关的计算结果。

### 3 主要结果

在图 1 中, 我们利用暗晕模型分别计算了暗物质速度场两点相关函数在垂直于和平行于两个粒子连线方向上的分量。首先, 我们注意到, 和暗物质密度场两点相关函数<sup>[18]</sup>的结果类

似, 在小尺度上, 暗物质速度场两点相关函数由1-halo项占主导, 根据公式(18)的第一个方程, 这时速度场的两点相关函数主要来自于暗晕本身的速度弥散。随着尺度的增加,  $\lambda(r|m)$  逐渐减小, 导致两点相关函数幅度随之下降, 在  $2\sim 3 h^{-1}\cdot\text{Mpc}$  尺度范围内, 2-halo项开始逐渐起主导作用, 这个尺度大约相当于  $10^{14}\sim 10^{15} M_{\odot}$  暗晕的典型尺度, 而我们知道, 大质量暗晕相对于暗物质的偏袒非常大, 致使暗晕速度之间的相关加强。

对  $\langle v_i v_j \rangle_{\parallel}(r)$ , 前面提到, 我们还需要考虑暗晕之间的相对运动, 如图1中下半图的实线所示, 在  $40\sim 50 h^{-1}\cdot\text{Mpc}$  尺度范围内, 两点相关函数开始出现负值, 这和Peel<sup>[15]</sup> 在2006年利用数值模拟样本发现的结果相吻合。作为对比, 我们用虚线表示了不考虑暗晕之间相对运动的情形, 那么这个模型的预言结果和对数值模拟样本的统计结果没法自洽, 这也是以前人们一直没法解释的现象。当然, 这一现象的最终解决, 还需要理论模型与数值模拟或观测样本统计之间更加细致的对比; 但是, 利用暗晕模型无疑给这方面的研究提供了一个强大的工具并指出了可能的努力方向。

#### 4 星系情形的简单推广

我们利用暗晕模型, 详细地描述了暗物质速度场两点相关函数的统计特性。很显然, 这个模型很容易应用到星系速度场的统计中, 类似地, 我们可以把一个星系的速度分解为星系相对于暗晕的位力速度和暗晕本身的速度:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{vir}}^{\text{gal}} + \mathbf{v}_{\text{halo}} . \quad (28)$$

可以假设星系相对于暗晕的位力运动和暗物质在统计上完全一致, 最后我们只需要知道星系在一定质量的暗晕中是怎样分布的, 这可以由当前流行的暗晕占据数模型给出<sup>[30]</sup>, 它给出了在一个质量为  $m$  的暗晕中发现  $N$  个星系的概率  $p(N|m)$ <sup>[31, 32]</sup>, 有了  $p(N|m)$ , 我们就能得到星系分布的任意阶矩:

$$g_n(m) \equiv \sum_N N(N-1)\dots(N-n+1) p(N|m) , \quad (29)$$

如果  $p(N|m)$  服从泊松分布, 那么就有  $g_n(m) = g_1^n(m)$ 。星系平均数密度可以表示为,

$$\bar{n}_{\text{gal}} = \int dmn(m) g_1(m) . \quad (30)$$

和暗物质粒子的情形类似, 当两个星系处于不同暗晕中时, 星系本动速度两点相关函数垂直于两个星系连线方向的分量可以写成,

$$\langle v_i v_j \rangle_{\text{gal}, \perp}^{2h}(r) = \frac{f^2(\Omega) H^2}{2\pi^2} \frac{1}{1 + \xi_{\text{gal}}(r)} \frac{1}{\bar{n}_{\text{gal}}^2} [I_1 + \xi_0(r) I_2] , \quad (31)$$



其中,

$$\begin{cases} I_1 = \int dk K_{\perp}(kr) P(k) \left[ \int dm g_1(m) n(m) \frac{\sigma_{\text{halo}}(m)}{\sigma_{-1}(m)} W[kR(m)] \right]^2, \\ I_2 = \int dk K_{\perp}(kr) P(k) \left[ \int dm g_1(m) n(m) b(m) \frac{\sigma_{\text{halo}}(m)}{\sigma_{-1}(m)} W[kR(m)] \right]^2. \end{cases} \quad (32)$$

而平行于两个星系连线方向的分量为,

$$\langle v_i v_j \rangle_{\text{gal}, \parallel}^{2h}(r) = \frac{f^2(\Omega) H^2}{2\pi^2} \frac{1}{1 + \xi_{\text{gal}}(r)} \frac{1}{\bar{n}_{\text{gal}}^2} \left[ I_1 + \xi_0(r) I_2 - \frac{1}{2\pi^2} I_3 \right], \quad (33)$$

其中,

$$\begin{cases} I_1 = \int dk K_{\parallel}(kr) P(k) \left[ \int dm g_1(m) n(m) \frac{\sigma_{\text{halo}}(m)}{\sigma_{-1}(m)} W[kR(m)] \right]^2, \\ I_2 = \int dk K_{\parallel}(kr) P(k) \left[ \int dm g_1(m) n(m) b(m) \frac{\sigma_{\text{halo}}(m)}{\sigma_{-1}(m)} W[kR(m)] \right]^2, \\ I_3 = \int dk j_1(kr) k P(k) \left[ \int dm g_1(m) n(m) b(m) \frac{\sigma_{\text{halo}}(m)}{\sigma_{-1}(m)} W[kR(m)] \right]^2. \end{cases} \quad (34)$$

而对两个星系处于同一个暗晕中的情形, 我们有,

$$\langle v_i v_j \rangle_{\text{gal}, \perp, \parallel}^{1h}(r) = \begin{Bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{1 + \xi_{\text{gal}}(r)} \int \sigma_{\text{halo}}^2(m) \frac{g_2(m) n(m)}{\bar{n}_{\text{gal}}} \frac{\lambda(r|m)}{\bar{n}_{\text{gal}}} dm, \quad (35)$$

如此, 在暗晕模型框架下, 结合暗晕占据数模型, 我们就同样给出了星系本动速度的两点相关函数的精确描述。

## 5 总结和讨论

我们利用暗晕模型, 详细地描述了暗物质速度场两点相关函数的统计特性, 对宇宙速度场本动速度两点相关函数在沿两个粒子连线方向的分量出现负值的现象提供了一种可能的解释。同时, 我们把这个模型推广到了星系速度场的统计中, 从而为连接理论和观测提供了一条可能的途径。需要特别指出的, 这个模型不受线性尺度的限制, 也适合非线性尺度。

我们计划将该模型的预言和利用一组从高精度数值模拟样本得到的星系半解析星表进行直接统计的结果作细致的对比, 一方面, 以检验该模型的有效性和精确性; 另一方面, 探讨利用该模型对星系本动速度两点函数进行预言和宇宙大尺度结构进行限制的可能性。

我们也希望在将来有针对星系本动速度巡天数据可利用的情况下, 将模型和观测结果进行对比。一般情况下, 我们测量的是星系的视向速度, 但星系视向速度两点相关函数  $\Psi_{ij}$  和我

们前面所讨论的星系速度两点相关函数有由如下方程所描述的关系<sup>[15]</sup>：

$$\Psi_{ij} = \Psi_{\perp} \cos \theta + (\Psi_{\parallel} - \Psi_{\perp}) \frac{(r_i^2 + r_j^2) \cos \theta - r_i r_j (1 + \cos^2 \theta)}{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \theta}, \quad (36)$$

其中,  $\theta = \hat{r}_i \cdot \hat{r}_j$  两个星系团位置之间的夹角,  $\Psi_{\perp}(r)$  和  $\Psi_{\parallel}(r)$  即星系两点相关函数垂直和平行于两者连线的分量。这说明, 该模型对未来观测的预言和限制也没有任何附加的困难。

## 致谢

感谢景益鹏研究员对该项工作的支持和帮助。

## 参考文献:

- [1] Peacock J A, Cole S, Norberg P, et al. *Nature*, 2001, 410: 169
- [2] Wu Y, Batuski D J, Khalil A. *ApJ*, 2009, 707: 1160
- [3] Bregman J N. *ARA&A*, 2007, 45: 221
- [4] Gorski K M, Davis M, Strauss M A, White S D M, Yahil A. *ApJ*, 1989, 344: 1
- [5] Straus M A, Willick J A. *Phys. Rep.*, 1995, 261: 271
- [6] Dekel A. *Galaxy Scaling Relations: Origins, Evolution and Applications*. US: Springer-Verlag, 1997: 245
- [7] Juskiewicz R, Davis M, Durrer R, Feldman H, Ferreira P, Jaffe A, Springel V. *Wide Field Surveys in Cosmology*, 1998: 113
- [8] Sheth R K, Diaferio A, Hui L, Scoccimarro R. *MNRAS*, 2001, 326: 463
- [9] Sheth R K, Hui L, Diaferio A, Scoccimarro R. *MNRAS*, 2001, 325: 1288
- [10] Croft R A C, Efstathiou G. *MNRAS*, 1994, 268: L23
- [11] Gorski K. *ApJ*, 1988, 332: L7
- [12] Nonin A S, Yaglom A M. *Statistical Fluid Mechanics*. Cambridge: MIT press, 1975: 3
- [13] Colberg J M, White S D M, MacFarland T J, et al. *MNRAS*, 2000, 313: 229
- [14] Bhattacharya S, Kosowsky A. *Phys. Rev. D*, 2008, 77: 083004
- [15] Peel A C. *MNRAS*, 2006, 365: 1191
- [16] Sheth R K, Zehavi I. *MNRAS*, 2009, 394: 1459
- [17] Seljak U. *MNRAS*, 2000, 318: 203
- [18] Cooray A, Sheth R. *Phys. Rep.*, 2002, 372: 1
- [19] Press W H, Schechter P. *ApJ*, 1974, 187: 425
- [20] Eke V R, Cole S, Frenk C S. *MNRAS*, 1996, 282: 263
- [21] Sheth R K, Tormen G. *MNRAS*, 1999, 308: 119
- [22] Navarro J F, Frenk C S, White S D M. *ApJ*, 1996, 462: 563
- [23] Mo H J, White S D M. *MNRAS*, 1996, 282: 347
- [24] Sheth R K, Lemson G. *MNRAS*, 1999, 304: 767
- [25] Bryan G L, Norman M L. *ApJ*, 1998, 495: 80
- [26] Sheth R K, Diaferio A. *MNRAS*, 2001, 322: 901
- [27] Bardeen J M, Bond J R, Kaiser N, Szalay A S. *ApJ*, 1986, 304: 15
- [28] Bernardeau F, Colombi S, Gaztañaga E, et al. *Phys. Rep.*, 2002, 367: 1
- [29] Fisher K B. *ApJ*, 1995, 448: 494
- [30] Peacock J A, Smith R E. *MNRAS*, 2000, 318: 1144
- [31] Berlind A A, Weinberg D H. *ApJ*, 2002, 575: 587
- [32] Berlind A A, Weinberg D H, Benson A J, et al. *ApJ*, 2003, 593: 1

# The Halo Model on Velocity Two-point Correlation Function

CAO Liang<sup>1,2</sup>

(1. Key Laboratory for Research in Galaxies and Cosmology, Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China; 2. Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** A number of surveys are expected to directly measure the peculiar velocity of galaxies or clusters. In linear theory, velocities are related to its nearby over density in a simple way, thus, the peculiar velocity is a measurement of density field which can avoid the bias of galaxies with respect to dark matter.

There are several ways of extracting useful cosmological information from a velocity survey, among which the two point correlation function of velocity is considered promising. While using the velocity of clusters and dark matter halos as tracers of peculiar velocity field to study the cosmic peculiar velocity correlation function, it is found that the two point correlation function along the line of separation has a negative signal, which can not be explained by the linear theory. Another difficulty remains to be solved is that the velocity is easier to measure on small scale while the measurements on large scale are more probable to be used for constraining theory.

We use the halo model to develop the velocity two point correlation function. Even if the velocity of halos is unbiased with that of dark matter, the pair weighted velocity statistics are biased with those of mass due to the fact that the halos are biased with the underlying density field. Associating the pair weighted velocity statistics, we recover the negative velocity correlation along the line of separation on large scales in the halo model frame work.

We can also simply extend this model to describe the two point correlation function of galaxies by introducing the halo occupation distribution model. In the near future when the galaxy peculiar velocity survey is available, we can then easily constrain the theory of large scale structure and galaxy formation by comparing the model prediction and directly measurement from observation with this sophisticated model.

**Key words:** peculiar velocity; halo model; halo occupation distribution