

文章编号: 1000-8349(2010)02-188-06



磁化吸积盘的不稳定性研究

周爱萍

(山东理工大学 理学院, 淄博 255049)

摘要: 从磁流体动力学方程组出发, 用微扰法得到的色散方程中含有环向磁场。利用全新的反常粘滞和反常阻抗, 对吸积盘进行数值计算, 结果表明, 只有垂直方向的弱磁场才可以引发一种单调不稳定性。磁场对粘性吸积盘表现为非稳定性因素, 增长率随磁场的增强而增大, 且最大增长率大于理想情况下的值。垂向磁场足够强时, 单调不稳定性不会出现。

关键词: 不稳定性; 吸积盘; 磁场; 反常粘滞

中图分类号: P142

文献标识码: A

1 引 言

由于众多天体周围都存在磁场, 因此在吸积盘的研究中, 磁场起着重要的作用。Balbus 和 Hawley 利用局部微扰法分析得出: 在弱磁场情况下, 吸积盘对轴对称扰动存在一种单调不稳定性, 而且这种单调不稳定性与环向磁场 B_θ 的大小无关^[1]。汪定雄等人^[2]在不考虑粘滞的条件下, 讨论了弱磁化等温薄吸积盘的轴对称脉动不稳定性, 得出结论: 随着磁场的增大, 不稳定的单调模式变得更加不稳定。

众所周知, 天体物理吸积盘是具有反常粘滞的流体盘, 盘内物质的粘性至少比通常物质高 8 个数量级, 但上述的不稳定性研究是基于无粘性理想流体盘 ($\nu_m = \eta_B = 0$) 的分析, 未考虑吸积盘的反常粘滞。在以前讨论有磁吸积盘的工作中, 只考虑了垂向磁场 B_z , 没有考虑环向磁场 B_θ 的影响^[3]。2002 年, 李晓卿等人^[4]给出了反常粘滞 ν_m 和反常阻抗 η_B 。反常阻抗产生于等离子体中荷电粒子遭受到低频磁流散射的过程, 通常它是一种低频的直流 (DC) 电阻抗, 其表达式为

收稿日期: 2009-07-07; 修回日期: 2009-08-28

$$\eta_B = 1.5 \times 10^8 \left(\frac{\overline{W}_0^P}{10^{-5}} \right)^{1/6} T_0^{5/6} n_0^{-1/2} \times \left(\frac{T_e}{T_0} \right)^{5/6} \left(\frac{n_e}{n_0} \right)^{-1/2} (\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}) , \quad (1)$$

其中, \overline{W}_0^P 为不稳定性的阈, n_0 、 T_0 为基准密度和温度。下面, 简单介绍计算得到磁粘滞系数的过程。自生的间歇磁流引起的磁粘滞力是

$$f_i^m = \nabla_j t_{ij}^m ,$$

其中, 自生磁流的麦氏应力张量为

$$t_{ij}^m = \left(\delta B_i \delta B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\delta \mathbf{B})^2 \right) / 4\pi .$$

这个应力在每单位时间内对体积元 $d\mathbf{r}$ 所做的功为 $-(\partial t_{ij}^m / \partial x_j) v_i d\mathbf{r}$ 。由于粘滞耗散, 功转化为热, 使体元内的熵增加,

$$\dot{S} = \int \frac{1}{T} \left(- \frac{\partial t_{ij}^m}{\partial x_j} v_i \right) d\mathbf{r} = \int t_{ij}^m \frac{v_{ij}}{T} d\mathbf{r} ,$$

式中 $v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ 。这意味着广义流 “ t_{ij}^m ” 与广义力 “ $-\frac{v_{ij}}{T}$ ” 有线性关系 [5]:

$$t_{ij}^m = \gamma_{ij;lk} \frac{v_{lk}}{T} = \eta_{ij;lk} v_{lk} ,$$

或者

$$t_{ij}^m = \eta_m \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) ,$$

式中 $\eta_{ij;lk} = \eta_m \left(\delta_{jl} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{lk} \right)$, η_m 是间歇流的磁粘滞系数, 也就是反常粘滞: $\eta_m = \eta_{lk;lk}$ ($l \neq k$, 对 lk 不求和)。对于吸积盘, v_{ij} 中 $r\varphi$ 成分为主项, 因而 t_{ij}^m 的主分量是

$$\langle \delta B_r \cdot \delta B_\varphi \rangle / 4\pi \approx \frac{1}{3} \langle (\delta \mathbf{B}) \rangle^2 / 4\pi ,$$

在此情况下, 得到磁流体动力学粘滞 [4]

$$\nu_m = 7 \times 10^{-12} \frac{c^2}{r \left| \frac{\partial \Omega(r)}{\partial r} \right|} T_0^{2/3} \left(\frac{T_e}{T_0} \right)^{2/3} \times \left(\frac{\overline{W}_0^P}{10^{-5}} \right)^{4/3} (\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}) . \quad (2)$$

2 基本方程和色散方程

描述磁化薄吸积盘的方程可以表示为

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla P - \rho \nabla \phi + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \mathbf{f}^m , \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta_B \nabla \times \mathbf{B}) , \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 , \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (6)$$

其中, ρ 是质量密度, \mathbf{v} 是速度, P 是压强, $\phi = -GM(r^2 + z^2)^{-1/2}$ 是引力势, \mathbf{B} 为磁感应强度, η_B 是阻抗, \mathbf{f}^m 是单位体积的粘滞力, 其表达式如下:

$$\mathbf{f}_i^m = \nabla_j t_{ij}^m = \rho \nu_m \left(\nabla^2 v_i + \frac{1}{3} \nabla_i (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) ,$$

这里, ν_m 为粘滞系数。假定 $P, v_r, v_\theta, v_z, \mathbf{B}_r, \mathbf{B}_\theta, \mathbf{B}_z$ 的轴对称扰动形式为

$$A = (\delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{B}, \delta P) \propto \exp(ik_r r + ik_z z - i\omega t)$$

且假设未扰动量 $v_r^0 = v_z^0 = 0, \mathbf{B}_r^0 = 0$ 。对于局域性分析, 利用 WKB 近似 ($k_r r \gg 1, k_z z \gg 1$), 把 $P = P^0 + \delta P, \mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \delta \mathbf{v}, \mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \delta \mathbf{B}$ 代入式 (1)~(4), 可以得到:

$$-i\omega \delta v_r - 2\Omega \delta v_\theta - \frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}}{4\pi\rho} \delta B_r + \frac{ik_r B_\theta}{4\pi\rho} \delta B_\theta + \frac{ik_r B_z}{4\pi\rho} \delta B_z + \frac{ik_r}{\rho} \delta P = -k^2 \nu_m \delta v_r , \quad (7)$$

$$-i\omega \delta v_\theta + \frac{\kappa^2}{2\Omega} \delta v_r - \frac{B_\theta}{4\pi\rho r} \delta B_r - \frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}}{4\pi\rho} \delta B_\theta = -k^2 \nu_m \delta v_\theta - i\frac{2}{3} k_r \frac{r}{P} \frac{d\Omega}{dr} \nu_m \delta P , \quad (8)$$

$$-i\omega \delta v_z + \frac{ik_z B_\theta}{4\pi\rho} \delta B_\theta + \frac{ik_z}{\rho} \delta P = -k^2 \nu_m \delta v_z , \quad (9)$$

$$-i\omega \delta B_r - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} \delta v_r = -k^2 \eta_B \delta B_r , \quad (10)$$

$$-i\omega \delta B_\theta - \frac{d\Omega}{d \ln r} \delta B_r - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} \delta v_\theta - \frac{B_\theta}{r} \delta v_r = -k^2 \eta_B \delta B_\theta , \quad (11)$$

$$-i\omega \delta B_z - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} \delta v_z = -k^2 \eta_B \delta B_z , \quad (12)$$

$$k_r \delta v_r + k_z \delta v_z = 0 , \quad (13)$$

$$k_r \delta B_r + k_z \delta B_z = 0 , \quad (14)$$

其中, $\kappa^2 = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 \Omega^2) = \frac{d\Omega^2}{d \ln r} + 4\Omega^2$; $k^2 = k_r^2 + k_z^2$, k_r 、 k_z 分别为波矢量 \mathbf{k} 的径向分量和垂向分量。式 (7)~(14) 所构成的线性方程组有非零解的充要条件是其系数行列式为零, 经过计算得到如下色散方程:

$$\begin{aligned} & \frac{k^2}{k_z^2} \left[(\sigma + k^2 \nu_m)(\sigma + k^2 \eta_B) + (k_z v_{Az})^2 \right]^2 + \kappa^2 \left[(\sigma + k^2 \eta_B)^2 + (k_z v_{Az})^2 \right] + \\ & \frac{k_r}{k_z} k^2 v_{A\theta} v_{Az} (\sigma + k^2 \nu_m)(\sigma + k^2 \eta_B) C' \rho + k_r k_z v_{A\theta} v_{Az} \left(k^2 v_{Az}^2 + 2\Omega \frac{d\Omega}{d \ln r} \right) C' \rho + \\ & \frac{k_r^2}{k_z^2} (\sigma + k^2 \eta_B)^2 (\sigma + k^2 \nu_m) 2\Omega C' \rho - 4\Omega^2 k_z^2 v_{Az}^2 = 0 . \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $\sigma = -i\omega$, $v_{Az} = \frac{B_z}{\sqrt{4\pi\rho}}$, $v_{A\theta} = \frac{B_\theta}{\sqrt{4\pi\rho}}$, $C' = \frac{2\nu_m r}{3P} \left| \frac{d\Omega}{dr} \right|$ 。如果 $\nu_m = \eta_B = 0$, 方程 (15) 可

化简为

$$\frac{k^2}{k_z^2} \left[\sigma^2 + (k_z v_{Az})^2 \right]^2 + \kappa^2 \left[\sigma^2 + (k_z v_{Az})^2 \right] - 4\Omega^2 k_z^2 v_{Az}^2 = 0, \quad (16)$$

此乃 Balbus 和 Hawley 得到的理想吸积盘的色散方程^[5], 方程中未出现 B_θ , 不稳定性与环向磁场的大小无关。

3 数值计算

对色散方程只能求数值解, 定义 $\tilde{k} = kr$, $\tilde{\sigma} = \sigma/\Omega_k$, $a_1 = k_r/k$, $a_2 = k_z/k$, $b_1 = \frac{\nu_m}{r^2 \Omega_k}$, $b_2 = \frac{\eta_B}{r^2 \Omega_k}$, $p^2 = \frac{B_z^2}{4\pi \rho r^2 \Omega_k^2}$, $q^2 = \frac{B_\theta^2}{4\pi \rho r^2 \Omega_k^2}$, $\tilde{\kappa}^2 = k^2/\Omega_k^2$, $S = \frac{d\Omega^2/d\ln r}{\Omega_k^2}$, $C = C' \rho$, 得到色散方程

的无量纲化形式:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_2^2} \left[(\tilde{\sigma} + \tilde{k}^2 b_1)(\tilde{\sigma} + \tilde{k}^2 b_2) + (a_2 \tilde{k} p)^2 \right] + \tilde{k}^2 \left[(\tilde{\sigma} + \tilde{k}^2 b_2)^2 + (a_2 \tilde{k} p)^2 \right] + \\ & \frac{a_1 \tilde{k}^2 p q C (\tilde{\sigma} + \tilde{k}^2 b_1)(\tilde{\sigma} + \tilde{k}^2 b_2) + a_1 a_2 \tilde{k}^2 p q C (\tilde{k}^2 p^2 + S)}{a_2} + \\ & 2\tilde{\Omega} C \left(\frac{a_1^2}{a_2^2} \right) (\tilde{\sigma} + \tilde{k}^2 b_1)(\tilde{\sigma} + \tilde{k}^2 b_2)^2 - 4(a_2 \tilde{k} p)^2 = 0, \end{aligned}$$

计算中, 取 $a_1 = 0.8$, $a_2 = 0.6$, $\tilde{k}^2 = 1.0$, $S = -3.0$, $C = 3.0$, $\tilde{\Omega} = 1.0$, 对于年轻恒星周围吸积盘, $T \propto r^{-1/2}$ ^[7], 所以 $b_1 = \frac{\nu_m}{r^2 \Omega_k} \approx 0.014 6 \tilde{r}^{-2/3}$, $\tilde{r} = r/r_i$, r_i 为吸积盘内边界半径, 又因 $\eta_B \ll \nu_m$, 计算中取 $b_1 = 0.03$, $b_2 = 1.0 \times 10^{-8}$, 为了讨论磁场对吸积盘不稳定性的影响, p 、 q 取两组不同的值, 进行数值计算, 结果如图 1 所示。图 2 给出 $p = 0.1$ 时, q 取不同值时的增长率分布。图 3 为只存在环向磁场时的增长率分布图。

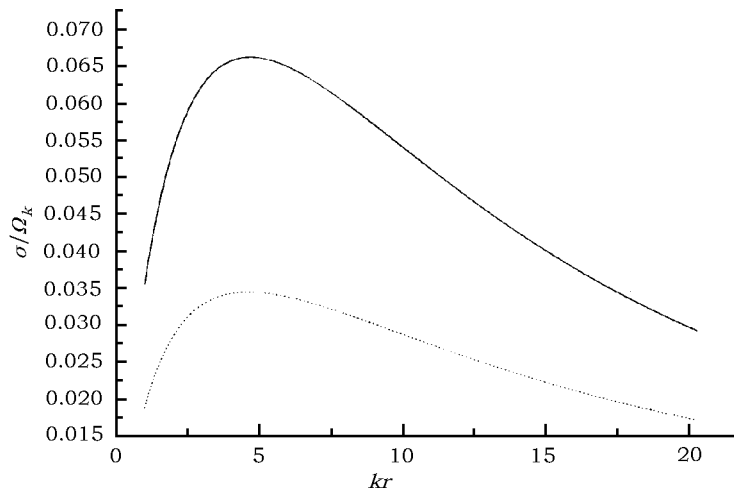


图 1 增长率随波数的分布, 点线对应 $p = q = 0.01$, 实线对应 $p = q = 0.02$

4 讨 论

本文利用微扰法首先给出色散方程, 通过数值计算, 得到增长率在磁场取不同值时随波数的分布图。由图 1 可以看出, 磁场对吸积盘表现为非稳定性因素, 在 k 值一定时, 磁场越强, 增长率越大, 这与汪定雄等人得到的结论相同^[2], 但增长率的分布图不同。图 2 中, 在垂直磁场取某一定值时, σ 随 B_θ 的增大而增大, 所以说, 环向磁场会影响吸积盘的不稳定性。

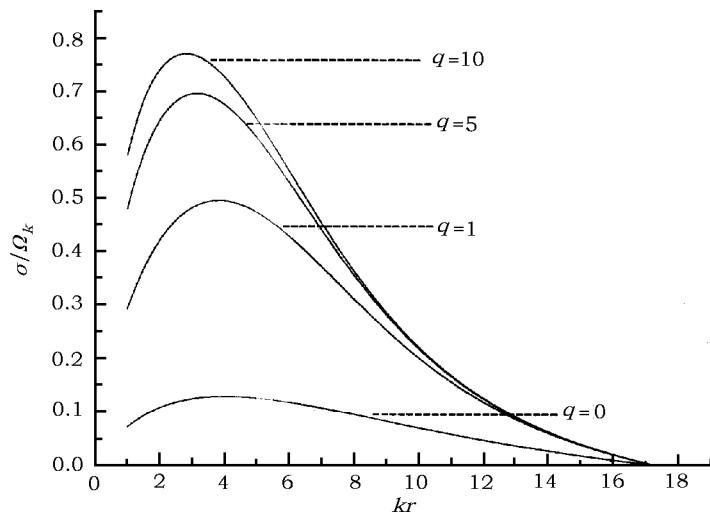


图 2 q 取不同值时的增长率分布 ($p = 0.1$)

如取 $q = 10$, 得到的 σ 最大为 $0.77\ 068\ \Omega_k$, 大于 Balbus 和 Hawley 得到的理想吸积盘的最大增长率 $0.75\ \Omega_k$ ^[6]。但 B_θ 增大到一定程度时, σ 的值趋于稳定, 不再变化。如果取 $p = 0$, $q = 0.1$, 得到的 $\sigma < 0$ (见图 3), 即环向磁场不会引发不稳定性。当 p 足够大时, 无法得到 σ 的实数解, 单调不稳定性消失。也就是说, 只有竖直方向的弱磁场才可以引发不稳定性^[8]。

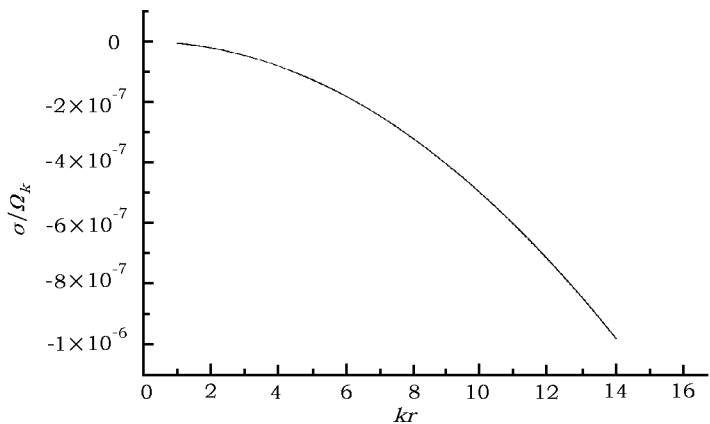


图 3 $p = 0, q = 0.1$ 时的增长率分布

早期的工作表明, 理想吸积盘的不稳定性与环向磁场无关, 这一结论很容易从方程 (16) 中得到。然而, 吸积盘是具有反常粘性的天体物理盘, 它与无粘性理想旋转流体盘有实质的不同。对粘性吸积盘进行分析后得到, 环向磁场不会引发单调不稳定性, 但这种不稳定性确与环向磁场 B_θ 的大小有关系, 且随着环向磁场的增大, 不稳定性不会消失。

参考文献:

- [1] Balbus S A, Hawley J F. ApJ, 1991, 376: 214
- [2] 汪定雄, 杨兰田, 吴少平. 天体物理学报, 1997, 17: 563
- [3] Zhou Ai-Ping, Li Xiao-Qing. Chin. Phys. Lett, 2004, 21: 584
- [4] Li X Q, Zhang H. A&A, 2002, 390: 767
- [5] Lifshitz E M, Pitaevskii L P. Physical Kinetics. Oxford: Pergamon Press, 1981: 27
- [6] Steven A, Balbus J, Hawley F. ApJ, 1992, 392: 662
- [7] Beckwith S V W. Theory of Accretion Disks-2. Dordrecht: Kluwer, 1994: 1
- [8] Velikhov E P. Sov. Phys. JETP, 1959, 9: 995

Study on the Instability of Magnetized Accretion Disks

ZHOU Ai-ping

(School of science, Shandong University of Technology, Zibo 255049, China)

Abstract: Starting from the MHD equations, the dispersion formula including azimuthal magnetic field is derived from the perturbation method. Using the new anomalous viscosity and resistivity, the numerical result shows that only the vertical magnetic field can trigger a kind of monotonic instability. The magnetic field acts as a factor of instability for the viscous accretion disk. The growth rate grows as the magnetic field strengthens. Furthermore, the maximal growth rate is bigger than that of the ideal case. The monotonic instability will not emerge if the vertical magnetic field is strong enough.

Key words: instability, accretion disks, magnetic field, anomalous viscosity