

文章编号: 1000-8349(2007)02-0169-08



# SAR 回波信号及 InSAR 干涉相位的统计特性研究

张 磊<sup>1</sup>, 陈艳玲<sup>2,3</sup>, 陈俊平<sup>1</sup>

(1. 同济大学 测量与国土信息工程系, 上海 200092; 2. 中国科学院 上海天文台, 上海 200030;  
3. 中国科学院 研究生院, 北京 100039)

**摘要:** 分析了 SAR 回波信号的构成及干涉相位的统计特性, 系统地研究了经多视处理后 SAR 干涉相位的概率密度函数与相干系数、视数的关系。明确了在不同视数下, 噪声对干涉图质量的影响, 为干涉图的质量评价和误差消除提供了理论依据。

**关键词:** 天体测量学; SAR; InSAR; 概率密度; 标准差; 相干系数; 视数

**中图分类号:** P129; P228; P237 **文献标识码:** A

## 1 引 言

SAR(合成孔径雷达)是一种全天候、全天时的现代高分辨率微波侧视成像雷达, InSAR(合成孔径雷达干涉测量)是继 SAR 之后兴起于 20 世纪 60 年代末的又一种空间对地观测新技术。它利用不同时间跨度对同一目标区域获取的两幅或多幅单视复数影像, 通过 SAR 成像和某些特殊的数据处理手段及几何转换, 最终获取地表某一分辨单元高精度的地形及形变信息, 其形变监测精度可达毫米级<sup>[1]</sup>。

从 SAR 影像对干涉图中获取的干涉相位是 InSAR 数据处理过程中极其重要的中间结果, 其质量的好坏直接影响着相位解缠的结果, 最终将影响 DEM 产品及形变场的精度。因此, 在 20 世纪 90 年代初 SAR 干涉相位统计特性就引起了国内外学者极大的重视, 其中, Lee<sup>[2]</sup>、Just<sup>[3]</sup>、Bamler<sup>[4]</sup>、Tough<sup>[5]</sup>及 Joughin<sup>[6]</sup>的成果最为引人注目, 并为后来的研究者广泛引用。由于在面散射条件下干涉相位为随机变量, 因而本文着眼于相位的统计特性, 系统分析回波信号和干涉相位的概率密度函数及方差与相干系数和视数的关系, 以期为干涉图的质量评价和误差消除提供理论依据。相关研究在国内鲜有文献报道。

收稿日期: 2006-04-11; 修回日期: 2006-07-31

本文首先介绍了 SAR 信号的构成及 SAR 干涉系统的模型, 然后对回波信号和干涉相位的统计特性进行了详细推导和分析, 给出了干涉相位的概率密度函数 (PDF) 及标准差 (SD) 的表达式, 并用曲线图直观地表示了 PDF、SD 与相干系数之间的关系。最后在干涉相位统计特性的基础上, 分析了噪声在不同视数下对干涉图质量的影响。

## 2 SAR 回波信号及 SAR 干涉系统模型

### 2.1 SAR 回波信号的构成

地面分辨单元的回波信号很大程度上依赖于分辨单元内散射体的特性。SAR 成像区域比其波长尺寸大得多, 故在分辨单元内含有大量的散射体, 且随机地散布于分辨单元<sup>[7,8]</sup>。每个散射体的回波特性由地物结构、粗糙度、介电性质、雷达波长、极化方式及雷达波入射角等因素共同确定<sup>[8,9]</sup>。

对于给定的分辨单元, 其回波信号可以看成是所有散射体回波的相干叠加, 表示形式如下<sup>[7]</sup>:

$$s = \operatorname{Re} s + j \operatorname{Im} s = A_b \exp \left[ j \left( \psi_b - \frac{4\pi}{\lambda} \rho \right) \right] = A_b \exp(j\psi_b) \exp \left( -j \frac{4\pi}{\lambda} \rho \right), \quad (1)$$

并有:

$$A_b \exp(j\psi_b) = \sum_{i=1}^N A_{\varepsilon i} \exp \left[ j \left( \psi_{\varepsilon i} - \frac{4\pi}{\lambda} \rho_{\varepsilon i} \right) \right]. \quad (2)$$

其中,  $\operatorname{Re} s$  和  $\operatorname{Im} s$  分别为所接收信号  $s$  的实部和虚部;  $A_b$  和  $\psi_b$  分别为地面分辨单元后向散射信号的振幅和相位;  $\lambda$  为雷达波长,  $\rho$  为雷达至地面分辨单元中心的距离,  $-\frac{4\pi}{\lambda} \rho$  为分辨单元因斜距产生的相位延迟;  $A_b \exp(j\psi_b)$  为  $N$  个散射体共同对回波信号所做的贡献;  $A_{\varepsilon i}$ 、 $\psi_{\varepsilon i}$  和  $\rho_{\varepsilon i}$  分别为第  $i$  个散射体回波信号的振幅、相位和至雷达的距离。

### 2.2 SAR 干涉系统模型

SAR 原始回波信号经过成像处理、辐射校正、几何校正以及预滤波等过程, 即可对生成的 SAR 单视复数图像对进行干涉处理。Just 和 Bamler<sup>[3,4]</sup> 曾用图 1 中的模型表示 SAR 干涉系统。

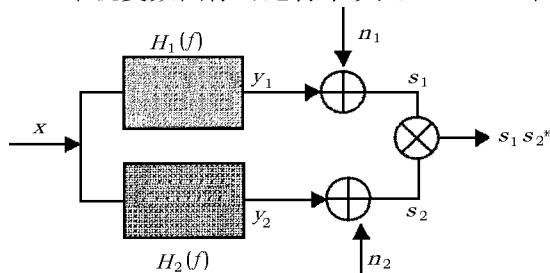


图 1 SAR 干涉系统

其中  $x$  表示地物回波信号,  $H_1(f)$  和  $H_2(f)$  表示影像处理过程, 两者因轨道参数等因素而有所不同。  $n_1$  和  $n_2$  为热噪声, 互不相关。处理后的信号可以表示为:

$$\begin{aligned} s_1 &= y_1 + n_1, \\ s_2 &= y_2 + n_2. \end{aligned} \quad (3)$$

$s_1$  和  $s_2$  共轭相乘即可得到干涉相位:

$$\psi = \arctan(s_1 \cdot s_2^*) = \arctan(y_1 y_2^* + y_1 n_2^* + n_1 y_2^* + n_1 n_2^*) , \quad (4)$$

### 3 SAR 回波信号及干涉相位的统计特性

#### 3.1 SAR 回波信号的统计特性

由于散射体在分辨单元中的分布是随机的, 实际处理中我们不可能确定每一散射体对回波信号的贡献。Hassen<sup>[7]</sup> 及 Bamler 和 Hartl<sup>[10]</sup> 认为当散射体满足如下假设: 1) 任何散射体对分辨单元回波信号的贡献都是均等的 (一般农田、森林、沙漠及其它自然散射体均满足此假设); 2) 每一散射体的相位均匀分布于  $[-\pi, \pi)$  之间; 3) 各散射体的相位互不相关; 4) 同一散射体的相位和振幅互不相关。且当散射体数目  $N$  趋近无穷大时, 根据中心极限定理, SAR 回波信号可看作服从正态分布的随机变量, 且信号的实部 (记为  $\text{Re } s$ ) 和虚部 (记为  $\text{Im } s$ ) 相互独立。在此假设下, 回波信号实部和虚部的概率密度函数为

$$P(\text{Re}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\text{Re}^2}{2\sigma^2}\right) , \quad (5)$$

$$P(\text{Im}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\text{Im}^2}{2\sigma^2}\right) . \quad (6)$$

且  $E[\text{Re}] = E[\text{Im}] = 0$ ;  $V[\text{Re}] = V[\text{Im}] = \sigma^2$ 。其中, 符号  $E$  为数学期望,  $V$  为方差。因实部和虚部互不相关, 即  $E[\text{Re}, \text{Im}] = E[\text{Re}]E[\text{Im}] = 0$ , 所以信号  $s$  的联合概率密度函数为

$$P(s) = P(\text{Re}, \text{Im}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}{2\sigma^2}\right) , \quad (7)$$

这里,  $\sigma^2 = \sigma_s^2 = \sigma_{\text{Re}}^2 = \sigma_{\text{Im}}^2$ 。

在极坐标系中, 回波信号可表示为  $s(A, \psi)$ ,  $A, \psi$  分别为信号的振幅和相位, 且  $A \in [0, \infty)$ ,  $\psi \in [-\pi, \pi)$ 。此时,  $\text{Re}$  和  $\text{Im}$  可以分别表示为  $\text{Re} = A \cos \psi$ ,  $\text{Im} = A \sin \psi$ 。在此规定之下,  $(\text{Re}, \text{Im})$  与  $(A, \psi)$  一一对应。这时, 有雅可比行列式:

$$J(A, \psi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \text{Re}}{\partial A} & \frac{\partial \text{Im}}{\partial A} \\ \frac{\partial \text{Re}}{\partial \psi} & \frac{\partial \text{Im}}{\partial \psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -A \sin \psi & A \cos \psi \end{vmatrix} = A , \quad (8)$$

则信号  $s$  的联合概率密度函数为

$$P(A, \psi) = P(A \cos \psi, A \sin \psi) |J| = P(\text{Re}, \text{Im}) |J| = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) . \quad (9)$$

其中,  $A \in [0, \infty)$ ,  $\psi \in [-\pi, \pi)$ 。回波信号振幅及相位的概率密度函数则为

$$P(A) = \int_{-\pi}^{\pi} P(A, \psi) d\psi = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right), \quad A \in [0, \infty), \quad (10)$$

$$P(\psi) = \int_0^{\infty} P(A, \psi) dA = \frac{1}{2\pi}, \quad \psi \in [-\pi, \pi), \quad (11)$$

由式(7)–(9)可知:  $P(A, \psi) = P(A)P(\psi)$ , 即回波信号的相位和振幅相互独立; 回波信号的振幅在  $[0, \infty)$  上服从瑞利分布, 期望和方差分别为  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ 、 $\frac{4-\pi}{2}\sigma$ ; 相位在  $[-\pi, \pi)$  上服从均匀分布, 期望和方差分别为  $0$ 、 $\frac{\pi^2}{3}$ 。

在 InSAR 应用中, 常会用到 SAR 能量的概念, 定义  $p = |s|^2 = \text{Re}^2 + \text{Im}^2 = A^2$ , 则

$$P(p) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{p}{2\sigma^2}\right). \quad (12)$$

可见, 分辨单元的能量服从指数分布, 且期望和方差分别为  $2\sigma^2$ 、 $4\sigma^4$ 。

### 3.2 干涉相位的统计特性

#### 3.2.1 干涉相位的概率密度函数

由前面的分析知道, SAR 回波信号  $s_1$  和  $s_2$  均可看作服从正态分布的随机变量, 且  $E[s_1] = E[s_2] = 0$ ;  $E[s_1^2] = E[s_2^2]$ , 其联合概率密度函数可表示为<sup>[3,4,7]</sup>

$$P(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi^2 |C_s|} \exp\left(-\begin{bmatrix} s_1^* & s_2^* \end{bmatrix} C_s^{-1} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}\right). \quad (13)$$

其中,

$$\begin{aligned} C_s &= E\left(\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^* & s_2^* \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} E(|s_1|^2) & E(s_1 s_2^*) \\ E(s_2 s_1^*) & E(|s_2|^2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E(|s_1|^2) & \gamma \sqrt{E(|s_1|^2)E(|s_2|^2)} \\ \gamma^* \sqrt{E(|s_1|^2)E(|s_2|^2)} & E(|s_2|^2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

因此, 复相干系数  $\gamma$  定义为:

$$\gamma = \frac{E(s_1 s_2^*)}{\sqrt{E(|s_1|^2)E(|s_2|^2)}} = |\gamma| \exp(j\psi_0). \quad (15)$$

在实际处理中, 常用窗口内的极大似然估值来代替  $\gamma$  的模, 设窗口尺寸为  $M \times N$ , 由于回波信号的相位服从均匀分布, 故  $\gamma$  的极大似然估值可表示为

$$|\hat{\gamma}| = \frac{\left| \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N s_1(i, j) s_2^*(i, j) \right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N s_1(i, j) s_1^*(i, j) \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N s_2(i, j) s_2^*(i, j)}}. \quad (16)$$

### 3.2.2 干涉相位的期望及标准差

对 (13) 式进行极坐标变换, 可得到干涉信号振幅和相位的联合概率密度函数<sup>[2]</sup>:

$$P(A, \psi) = \frac{2L(LA)^L}{\pi\zeta^{L+1}(1-|\gamma|^2)\Gamma(L)} \exp\left(\frac{2|\gamma|LA \cos(\psi - \psi_0)}{\zeta(1-|\gamma|^2)}\right) K_{L-1}\left(\frac{2LA}{\zeta(1-|\gamma|^2)}\right), \quad (17)$$

其中,  $\zeta = \sqrt{E(|s_1|)E(|s_2|)}$  为两幅影像的平均能量;  $L$  为干涉图视数;  $K_{L-1}$  为改进的第三类 Bessel 函数; Gamma 函数  $\Gamma(L)$  定义为

$$\Gamma(L) = \begin{cases} \int_0^\infty t^{L-1} e^{-t} dt, L \in R \\ (L-1)!, L \in N \end{cases}. \quad (18)$$

对振幅  $A$  积分, 可得到干涉相位的边缘概率密度函数:

$$P(\psi) = \frac{(1-|\gamma|^2)^L}{2\pi} \left\{ \frac{\Gamma(2L-1)}{[\Gamma(L)]^2 2^{2(L-1)}} \times \left[ \frac{(2L-1)\beta}{(1-\beta^2)^{L+0.5}} (0.5\pi + \arcsin\beta) + (1-\beta^2)^{-L} \right] + \frac{1}{2(L-1)} \sum_{i=0}^{L-2} \frac{\Gamma(L-0.5)}{\Gamma(L-0.5-i)} \frac{\Gamma(L-1-i)}{\Gamma(L-1)} \frac{1+(2i+1)\beta^2}{(1-\beta^2)^{i+2}} \right\}. \quad (19)$$

其中,  $\beta = |\gamma| \cos(\psi - \psi_0)$ .

一般, 干涉图视数  $L = 1$ , 此时干涉相位的概率密度函数可表示为<sup>[3,5]</sup>

$$P(\psi) = \frac{1-|\gamma|^2}{2\pi} \frac{1}{1-|\gamma|^2 \cos^2(\psi - \psi_0)} \times \left\{ 1 + \frac{|\gamma| \cos(\psi - \psi_0) \arccos[-|\gamma| \cos(\psi - \psi_0)]}{[1-|\gamma|^2 \cos^2(\psi - \psi_0)]^{1/2}} \right\}. \quad (20)$$

若将干涉相位的取值定为  $[-\pi + \psi_0, \pi + \psi_0]$ , 则干涉相位的期望  $E(\psi)$  为  $\psi_0$ , 方差为

$$\begin{aligned} V(\psi) &= E\{(\psi - \psi_0)^2\} = \int_{\psi_0-\pi}^{\psi_0+\pi} (\psi - \psi_0)^2 P(\psi) d\psi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \psi^2 P(\psi + \psi_0) d\psi. \end{aligned} \quad (21)$$

## 4 应用分析

### 4.1 SAR 回波信号统计特性试验

图 2 给出了 SAR 回波信号的振幅、相位和能量的概率密度曲线。

为了验证理论推导的正确性, 本文从挪威某地区的 SAR 数据中选取了一个  $100 \times 1000$  的窗口, 对其中的像素进行了统计。由于雷达阴影及个别信号较强的散射体会对信号的概率密

度造成干扰<sup>[8]</sup>，故在统计之前，对数据进行了过滤，最终选取了 8 万个像素作为样本空间。为了示意明显，还对样本进行了等距归并，结果如图 3 所示。

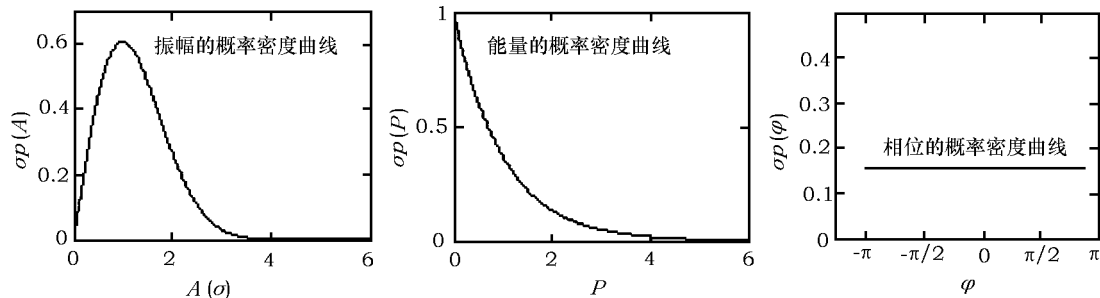


图 2 振幅、能量、相位的概率密度曲线

通过比较可以看出采样窗口中的大部分像素均服从理论推导的概率分布，理论与观测结果总体上保持着很好的一致性。

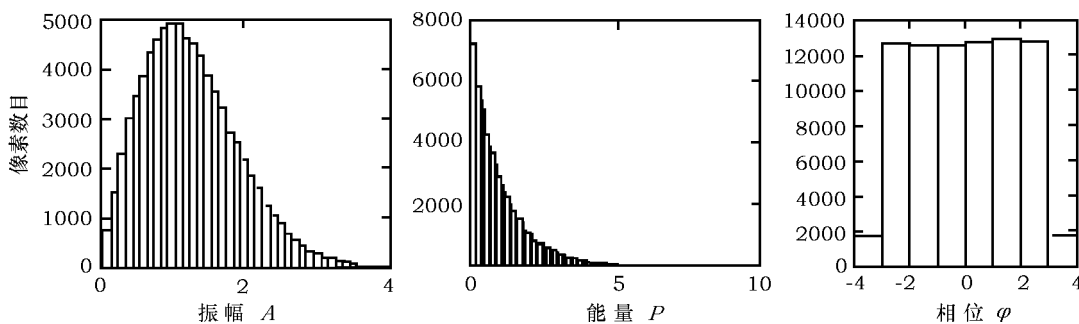


图 3 采样窗口中振幅、能量及相位的统计直方图

#### 4.2 干涉图概率曲线应用

图 4 给出了不同视数下，概率密度函数随干涉相位  $\psi$  的变化曲线 (假设相位期望  $\psi_0$  为零)。从图中可以看到，当视数一定时，随着相干系数的增大，相位分布的标准差越来越小；相干系数不变的情况下，随着视数的增加，相位不断向期望集中。当相干系数为零，即两幅影像完全不相干时，相位呈均匀分布。当相干系数趋近于 1 时，干涉相位的概率密度则近似于  $\delta$

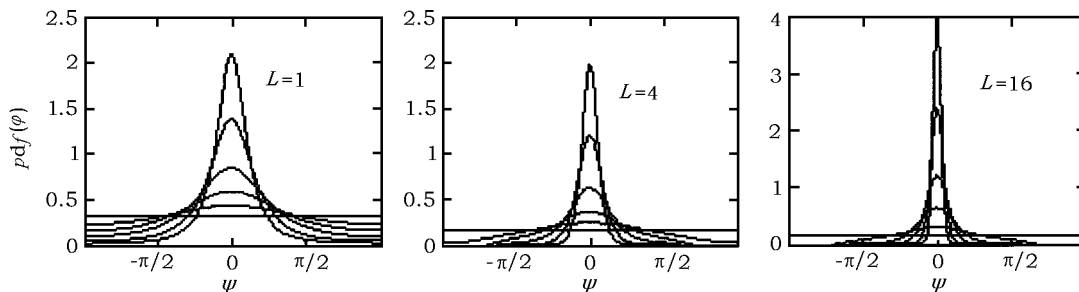


图 4 不同视数不同相干系数下的概率密度曲线

相干系数由下往上依次为 0、0.2、0.4、0.6、0.8、0.9

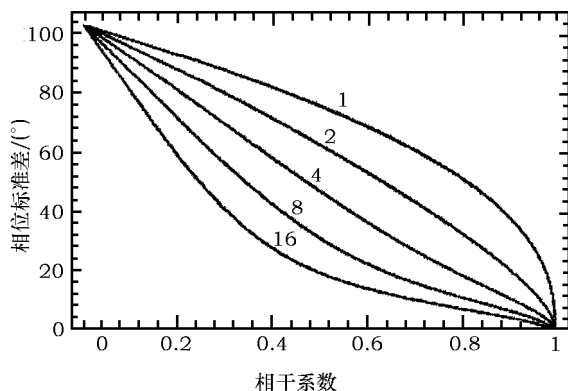


图5 不同视数下标准差与相干系数的关系

尽量避免引入不必要的噪声。

## 5 结 论

本文从概率的角度对 SAR 回波信号和干涉相位的统计特性进行了详细的分析, 给出了相应的概率密度函数、期望及方差的表达式。试验数据表明, 采样窗口中的大部分像素均服从理论推导的概率分布, 理论值与观测结果总体上保持着很好的一致性。相干系数作为干涉相位概率密度函数中最重要的参数, 讨论了其在不同视数下与标准差的关系, 证实了多视数处理在消除干涉相位不确定性方面的有效性, 同时还发现噪声对高相干区域的影响要大于低相干区域, 这对干涉图质量评价及误差消除具有指导意义。

另外, 本文的分析一直是基于回波信号整体上服从正态分布的假设, 尽管在大多数情况下这些假设是成立的, 但当景区中存在大量永久散射体时, 正态分布的假设就不够恰当。这时采用何种合适且可靠的概率分布来描述其统计特性从而推出能够高度反映干涉图质量的相干系数, 是今后值得研究的问题。

## 参考文献:

- [1] Rosen P A, Hensley S, Joughin I R, et al. Proceedings of the IEEE, 2000, 88: 333-382
- [2] Lee J S, Hoppel K, Mango S, et al. IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, 1994, 32: 1017-1027
- [3] Just D, Balmer R. Appl. Optics, 1994, 33 (20): 4361-4368
- [4] Bamler R, Just D. International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 1993, 18: 980-984
- [5] Tough R J A, Blacknell D, Quegan S. Proceedings of the Royal Society, 1995, 449: 567-589
- [6] Joughin I R, Winebrenner D P, Percival D B. IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, 1994, 32: 562-574
- [7] Hanssen R F. Radar Interferometry: Data Interpretation and Error Analysis. Dordrecht: Kluwer, 2001
- [8] Liu G X. Ph.D Dissertation. Hong Kong: Hong Kong Polytechnic University, 2003
- [9] Zebker H A, Villasenor J. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1992, 30(5): 950-959
- [10] Bamler R, Hartl P. Inverse Problems, 1998, 14: R1-R54

分布。图5示意了在视数分别为1、2、4、8和16下, 干涉相位标准差随相干系数变化的曲线<sup>[10]</sup>。

利用这些曲线可以通过相干系数来估计相位噪声, 例如, 当相干系数为0.8时, 在单视数下, 相位标准差为52°左右, 而在16视数下, 仅为10°。另外, 从图中还可以看到, 对于多视处理后的干涉图, 高相干区域对噪声更为敏感, 即等量的噪声加入到高相干区域引起的相干损失要比加入到低相干区域大。所以处理干涉质量较高的影像时一定要尽量

## The Statistic Characteristics of SAR Signals and Interferometric Phases

ZHANG Lei<sup>1</sup>, CHEN Yan-ling<sup>2,3</sup>, CHEN Jun-ping<sup>1</sup>

(1. Department of Land Surveying and Geo-Informatics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China; 3. Graduate school of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

**Abstract:** The phases derived from SAR image pairs are key observables for interferometric processing, so it is important to understand the statistic characteristics of observables to enable assessment of the accuracy of deformation measurements. In this paper, the statistic properties of SAR signal and interferometric phases are analyzed and the probability density function (PDF) of multi-look processed SAR interferometric phase is deduced. Then the relation among PDF coherence and multi-look numbers is investigated. In addition, based on statistic characteristics, the impact of noise on interferogram under different multi-look numbers is derived.

The study has shown that the response of a resolution cell on earth to the arriving radar pulse is strongly dependent on the scattering mechanisms involved. But under a set of assumptions, the SAR signals can be taken as Gaussian random variables. The PDFs of these variables we derived are in good agreement with the observed results in actual data experiments. Although the PDF of the phase has a uniform distribution, the interferometric phase is not uniform if the two signals have some degree of correlation. From the relation of coherence and standard deviation under different multi-look numbers, we find that coherence can be enhanced by averaging multiple pixels at the cost of reducing the resolution and areas with high coherence are more sensitive to the noise than those with low coherence. The study results are helpful to assess the quality of interferogram and eliminate errors.

**Key words:** astrometry; SAR; interferometric SAR; possibility density; standard deviation; coherent coefficient; mulilook number