

讲座

相对论流体力学初步

(为射电天文研究之用)

钱善璿

(中国科学院北京天文台)

提 要

本文对相对论流体力学的基本理论及最近的进展作了统一的和连贯的叙述,以便为射电天文研究提供一个简明扼要的基础材料。

在类星体和星系核的射电天文的观测研究中,已经揭示出那里存在着相对论运动效应(在0.1—10pc尺度范围内)^[1]。而在更大尺度上,例如最近在天鹅座A的西北射电瓣内测到了~60kpc长的射电喷流中^[2],流动也可能是相对论性的。因此不论在小尺度还是大尺度的射电现象的研究中,都需要考虑相对论效应。这些年来,在河外射电天文学中经常要利用相对论流体力学的研究结果,有些工作直接是为射电天文而进行的。本文的目的就是根据这种需要(特别是针对射电喷流的研究的需要),对有关的相对论流体力学研究的基本结果,加以统一的和连贯的叙述,以便为射电天文的研究提供一个基础材料。

一、相对论流体力学的基本关系

这方面的主要参考书可见 L. D. Landau & E. M. Lifshitz 的“Fluid Mechanics”(1959)第十五章。

1. 基本物理量和参考系

在本文中我们采用伽里略时空参考系。

四维矢量 $x^i = [ct, \boldsymbol{r}]$ $i=0$ 为时间分量
 $i=1, 2, 3$ 为空间分量

四维速度 $u^i = \left[\gamma, \gamma \frac{\boldsymbol{v}}{c} \right]$ $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$

度规张量 $g_{ik} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

四维长度单元 $ds^2 = -g_{ik} dx^i dx^k$

标号 i 和 k 的移标规则为:上下移动时间分量的标号,不改变符号(如 $x^0 = x_0$),移动空间分

量的标号则要改变符号(如 $x^1 = -x_1$); 下面有时为区别空间分量, 我们用 α 或 β 作为空间角标(如 x^α , $\alpha=1, 2, 3$)。下面对于观测参考系中的物理量将加角标 ob , 以便和共动系中的物理量加以区别。例如, e (内能密度), p (压强), w (热函数或单位体积的焓, $=p+e$), n (粒子数密度), ρ (物质密度) σ (单位体积的熵), B (磁场强度), E (电场强度)等都为共动系中的物理量, 而 $B_{ob}, \rho_{ob}, \sigma_{ob}$ 等为观测参考系中的物理量。在共动系中, 能量-动量张量 T_{ik} 取

这样的形式: $T_{ik} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$ 。对于观测参考系(流体单元的四维速度为 u^i), 四维能量-

动量张量为:

$$T_{ik} = wu_i u_k + p\delta_{ik} \quad (1)$$

(这里为简明起见, 略去了角标 ob), 或者有

$$\left. \begin{aligned} T_{00} &= \gamma^2 w - p \\ T_{0\alpha} &= T_{\alpha 0} = -\frac{v_\alpha}{c} w \gamma^2 \\ T_{\alpha\beta} &= \frac{w v_\alpha v_\beta}{c^2} \gamma^2 + p \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

T_{00} —能量密度, $-cT_{0\alpha}$ —能量流密度, $-T_{0\alpha}/c$ —动量密度, $T_{\alpha\beta}$ —动量流密度张量。在给出上式 T_{ik} 时, 我们不考虑耗散过程(粘滞和热传导), 即只考虑理想流体的情形。

2. 运动方程和连续性方程

描述流体系统的能量守恒和动量守恒定律的运动方程包含在下列方程之中

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = u_i \frac{\partial}{\partial x^k} (wu^k) + wu^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0 \quad (3)$$

粒子数目连续方程为

$$\frac{\partial (nu^i)}{\partial x^i} = 0 \quad (4)$$

利用条件 $u^i u_i = 1$, 以 u^i 标乘(3)式可得 $u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial x^k} (wu^k) = 0$ 。代入(3)式即可得到欧勒方程的相对论形式

$$wu^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} + u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} - \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0 \quad (5)$$

(5)式的三个空间分量是欧勒方程的相对论推广(而时间分量是三个空间分量的结果)。

利用连续性方程(4)式, 由(3)式可得

$$nu^k \left\{ \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{w}{n} \right) - \frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x^k} \right\} = 0 \quad (6)$$

即沿着四维流线, 流动是绝热的:

$$u^k \frac{\partial (\sigma/n)}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\sigma}{n} u^k \right) = 0$$

或沿流线 $\frac{\sigma}{n} = \text{const.}$ 。

3. 稳恒流动下的贝努利方程

在稳恒流动 ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) 下, 欧勒方程(5)化为

$$w\gamma(\mathbf{v} \cdot \text{grad})(\gamma\mathbf{v}) = -c^2 \text{grad } p - \gamma^2 \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \text{grad } p) \quad (7)$$

利用稳恒流动下的关系式 $\mathbf{v} \cdot \text{grad} \frac{\sigma}{n} = 0$ (沿流线 $\frac{\sigma}{n} = \text{const.}$), 我们有 $\mathbf{v} \cdot \text{grad} \left(\frac{w}{n} \right) = \frac{w}{n} \cdot \text{grad } p$ 。于是从(7)式可以得到稳恒流动下的贝努利方程为

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad} \left(\frac{\gamma w}{n} \right) = 0 \quad (8)$$

即沿流线, $\frac{\gamma w}{n} = \text{const.}$ 。

4. 极端相对论性流体的准一维稳恒流动和拉瓦喷管

对于极端相对论性流体 ($e \gg \rho c^2$), 其状态方程为

$$p = (\Gamma - 1)e \quad (9)$$

这里我们还要利用压强和粒子数密度的关系

$$pn^{-\Gamma} = \text{const.} \quad (10)$$

于是 $w \propto p$ 。故在稳恒流动下, 利用上述贝努利方程我们得到流动的洛仑兹因子 γ 和物理量 p , n 或 e, w 之间的关系(沿流线):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma p}{n} &= \text{const.} \\ \text{或} \quad \gamma p \frac{\Gamma-1}{\Gamma} &= \text{const.}, \quad \gamma n^{\Gamma-1} = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(显然 $\gamma e \frac{\Gamma-1}{\Gamma} = \text{const.}$ 和 $\gamma w \frac{\Gamma-1}{\Gamma} = \text{const.}$)。上述 Γ 为绝热指数, 对于极端相对论性流体 $\Gamma = 4/3$, 所以 $\gamma \propto p^{-1/4}$ 。这意味着, 在准一维稳恒流动下, 极端相对论流体由于绝热膨胀, 靠内能的消耗(压力下降)来获得整体运动。

关于拉瓦喷管的形成和特性见参考文献: Blandford & Rees (1974)^[3] 和 Wiita (1978)^[4]。

假定为极端相对论等离子体(流体), 在准一维稳恒的相对论性流动下的总能量流守恒和粒子流量的守恒方程分别为

$$cT^{01}A = w\gamma^2\beta A = \text{const.} \equiv L_0 \quad (12)$$

$$n\gamma\beta A = \text{const.} \quad (13)$$

(其中 $\beta = \frac{v}{c}$, v 为流速, A 为管道的截面积, $= \pi r^2$)。由(12)和(13)式直接可得到贝努利

方程 $\frac{w\gamma}{n} = \text{const.}$ 。从(12)式可以得到压强 p 和截面积 A 之间的关系:

$$A = \frac{L_0}{4c} p^{-3/4} p_0^{-1/4} \left\{ \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/2} - 1 \right\}^{-1/2} \quad (14)$$

其中 p_0 为驻点处的压强(见图 1)，压强 p 的分布由外部约束介质的压强分布特性所规定。在喷口上截面具有最小值 A^* ：

$$A^* = \frac{3\sqrt{3}}{8c p_0} L_0 \quad \text{或} \quad r^* = \left(\frac{3\sqrt{3}}{8c \pi p_0} L_0 \right)^{1/2} \quad (15)$$

喷口上的压强和流速分别为

$$\left. \begin{aligned} p_* &= \frac{4}{9} p_0 \\ v_* &= c / \sqrt{3} \text{ (相对论等离子体内的声速)} \\ \text{或} \quad \gamma_* &= \sqrt{\frac{3}{2}} = 1.22 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

在喷口以外是超声速流动 $v > v_*$ 。

从(13)式(粒子流量守恒方程)可以得到喷口以外流速的洛仑兹因子 γ 和截面 A 之间的关系为： $\gamma^{\frac{2-\Gamma}{1-\Gamma}} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)^{1/2} A = \text{const.}$ 若为极端相对论性流动(远离喷口处)， $\gamma \gg 1$ ，则有

$$\gamma = \text{const.} \cdot A^{\frac{\Gamma-1}{2-\Gamma}} \quad (\text{或} = \text{const.} \cdot r^{\frac{\Gamma(\Gamma-1)}{2-\Gamma}}) \quad (17)$$

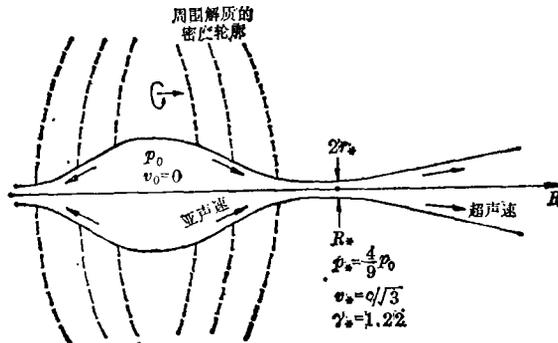


图 1. 准一维稳恒流动下的拉瓦喷管。

因为对于极端相对论等离子体 $\Gamma = \frac{4}{3}$ ，所以 $\gamma \propto r$ ，即是向外加速的相对论性流动。所以，在外部介质的约束下，通过拉瓦喷管机制，相对论流体(等离子体)在绝热流动过程中，消耗内能而变成整个流体的相对论性流动的动能。

通过 γ 和 A 的关系式(17)及前面给出的 p, n 等和 γ 的关系式(11)，我们可以得到 p, n 等与截面 A 之间的关系式：

$$p \propto A^{-\frac{\Gamma}{2-\Gamma}} \quad \text{和} \quad n \propto A^{-\frac{1}{3-\Gamma}} \quad (18)$$

(这里 $p = \frac{1}{3} w$)。

附带指出, 流体的总能量密度 $W = T_{00} = \frac{e + p v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} = \gamma^2(e + p v^2/c^2) = p(4\gamma^2 - 1)$ 。对于极端相对论流体, $W = \gamma^2 e \left(1 + \frac{1}{3} \frac{v^2}{c^2}\right)$, 这表明能量密度在作洛伦兹变换时要乘上因子 $\gamma^2 \left(1 + \frac{v^2}{3c^2}\right)$ 。

总动量流 $Q = T^{11} A = \left(\gamma v \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} + p\right) A$, 在流动中不守恒, 这是因为沿通道流体和管壁发生动量交换, 利用总能量流守恒方程(12)式, 可以得到(对于极端相对论等离子体):

$$Q = \frac{1}{2} Q_* \left\{ \frac{v}{v_*} + \frac{v_*}{v} \right\} \quad (19)$$

其中 v_* 和 Q_* 为拉瓦喷口处的值。

5. 电子-质子等离子体的准一维相对论流动

在射电天文学研究中, 我们通常遇到的是电子-质子等离子体, 并作流体处理。上节已表明如何通过拉瓦喷管机制形成相对论性流动。这种超声速流动是靠绝热膨胀消耗流体内能来获得。在射电天文学中, 我们总是假定电子是极端相对论性的(并且假定磁场很弱, 不影响相对论喷流的动力学), 以便研究它们的同步加速辐射的特性。但质子则在绝热膨胀过程中, 由于能量的损耗可能变成非相对论性的。质子能量状态的这种改变也应当反映到流动的特性上去。实际上我们要考虑电子和质子都是极端相对论性的情形 ($e_e \gg \rho_e c^2$, $e_i \gg \rho_i c^2$, $e = e_i + e_e$, 即极端相对论性流体); 电子为极端相对论性而质子为非相对论性的情形 ($e_e \gg \rho_e c^2$, 但 $e_i < 2\rho_i c^2$; 即典型的非相对论性流体), 以及一些中间情形。为了把非相对论性流体情形包括进去, 我们必须把第4节中的 w , e 相应地改为 $(w - nm_i c^2)$ 和 $(e - nm_i c^2)$ 。故我们有状态方程为

$$p = (\Gamma - 1)(e - nm_i c^2) \quad (20)$$

和贝努利方程为

$$\frac{\gamma(w - nm_i c^2)}{n} = \text{const.} \quad (21)$$

此外我们有

$$w - nm_i c^2 = \Gamma(e - nm_i c^2) \quad (22)$$

由(20)–(22)式, $\frac{\gamma p}{n} = \text{const.}$ 仍然成立。另外 $pn^{-\Gamma} = \text{const.}$ 仍然适用。但 Γ 的取值则由于

等离子体内部状态的不同而要取不同的值。对于极端相对论性电子-质子等离子体, w 和 $e \gg nm_i c^2$, $\Gamma = 4/3$, 本节讨论的公式都化到上节的公式。对于非相对论性的电子-质子等离子体(由极端相对论性电子和非相对论性质子组成), $\Gamma = 3/2$, 假定质子动能等于电子动能, 即

$$k_i = \frac{e_i - nm_i c^2}{e_e - nm_e c^2} = 1。$$

由上述, 仍有 $\gamma \propto n^{1-\Gamma}$, 所以

$$n = \text{const.} \left(\frac{w}{n} - m_i c^2 \right)^{\frac{1}{\Gamma-1}}, \quad (23)$$

于是利用(13)式得到

$$\gamma\beta\left(\frac{w}{n} - m_i c^2\right)^{\frac{1}{\Gamma-1}} \cdot A = \text{const.} \quad (24)$$

现在我们从(24)式出发来讨论计及流体内部状态变化时相对论性流动的特性^{[5], [6]}。先设定喷管截面 A 和距离 R 的关系为

$$A \propto R^{2\epsilon} \quad (\text{或 } r \propto R^\epsilon) \quad (25)$$

R 从星系核中心量起, R_* 为喷口位置。 $\epsilon < 1$ 为约束喷流, $\epsilon = 1$ 为圆锥形喷流, $\epsilon > 1$ 为开张喷流。改写(24)式, 令 $\frac{w}{nm_i c^2} = \frac{\gamma_\infty}{\gamma}$, 我们就有

$$\gamma\beta\left(\frac{\gamma_\infty}{\gamma} - 1\right)^{\frac{1}{\Gamma-1}} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^{2\epsilon} \quad (26)$$

这里 γ_∞ 实际上相当于在 $R \rightarrow \infty$ 时相对论性流动的洛仑兹因子(假定电子保持极端相对论性, 而质子为非相对论性), R_0 是个常数。由(26)式, 在极端相对论性流体情形下, $w \gg nm_i c^2$ ($\Gamma = 4/3$), 当 $\gamma \ll \gamma_\infty$ (但 $\beta \sim 1$) 时, $\gamma \propto R^\epsilon$; 属于极端相对论性流动的喷流区域可取在 R_* 到几十个 R_* 的距离上^[6]。

在非相对论流体的喷流区域内(即“冷离子”区域, 位在喷流的外部), Γ 可取为 $3/2$, 故我们有

$$\gamma\beta\left(\frac{\gamma_\infty}{\gamma} - 1\right)^2 = \left(\frac{R_0}{R}\right)^{2\epsilon} \quad (27)$$

假定开始变成非相对论流体是在距离 R_0 处, 流速的洛仑兹因子为 γ_0 , 则可以证明 $\frac{\gamma_\infty}{\gamma_0} = 1 + \Gamma(1+k_i) \frac{(e_e/n)_0}{m_i c^2}$ 。因为冷离子情形下, $\left(\frac{e_e}{n}\right)_0 < m_i c^2$ 仍满足, 故 $\frac{\gamma_\infty}{\gamma_0} < 1 + \Gamma(1+k_i)$ 。所以流体仍然在加速, 但很缓慢, $\frac{\gamma_\infty}{\gamma_0} < 4$ (取 $k_i = 1$ 和 $\Gamma = 3/2$)。所以在这段喷流区域内, 可

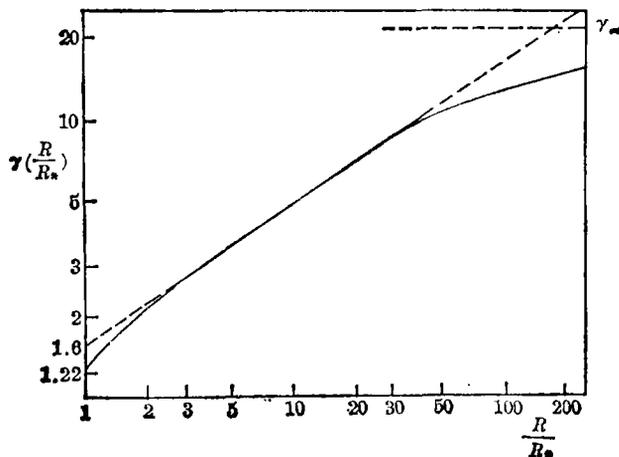


图 2. 相对论性喷流的速度解 $\gamma(R)$ 。

以看作 $\gamma \sim \text{const.}$, 整个流体的流动特性以质子的惯性为主, 相对论性电子仍在消耗能量, 但只能缓慢地加速流体。以上的讨论, 主要按照 Reynolds 的叙述^[6]。实际上在考虑相对论性喷流时, 为了得到喷流速度的连续的解 $\gamma(R)$, Reynolds 把对于极端相对论性等离子体的解与对于“冷离子”情形(即非相对论性流体)的解衔接起来, 图2中的实线就代表这种解。

6. 喷流状态的“双指数”表达方法

上节中我们得到了相对论喷流流动速度的解 $\gamma(R)$, 它包含了电子-质子等离子体内部状态的变化。在绝热膨胀过程中, 流体内能转化为整体运动的动能, 流体得到加速, 电子和离子的能量下降。等到离子变成非相对论性时, 流动以离子的惯性运动为主。相对论电子可继续冷却, 但流体不发生明显加速(或加速很慢)。这里主要考察两种过程: 流动的整体加速和电子的冷却。为了分析电子-质子等离子体内部状态改变时, 喷流的参量(p, γ, n)等和喷管截面的关系, Reynolds^[6]提出, 适用于极端相对论性流体的公式(9), (17)和(18)式, 也可以近似地用来描述非相对论性流体, 但其中的 Γ 应理解为某个“变相”的绝热指数, 取 $1 \leq \Gamma \leq 4/3$ ($\Gamma = 4/3$ 即为极端相对论流体情形)。

以上我们还未涉及到相对论电子由于绝热膨胀而引起的能量损耗的表达问题(电子冷却)。在射电天文学研究中, 我们通常研究相对论性电子的同步加速辐射。因此需对电子能量分布及其变化, 磁场及其变化作出具体规定。假设共动系中相对论性电子具有幂律能量分布, $N(E)dE = KE^{-s}dE$, $N(E)$ 为单位体积单位能量间隔内的相对论电子数目(各向同性分布, K 为系数。按照 Reynolds, 引入另一个“绝热指数” Γ^* 表达相对论电子的冷却:

$$E \propto n^{\Gamma^*-1} \quad (28)$$

于是我们有

$$\left. \begin{aligned} E &\propto A^{-\frac{\Gamma^*-1}{2-\Gamma}} \\ K &\propto A^{-\frac{1}{2-\Gamma} [1+(s-1)(\Gamma^*-1)]} \\ \gamma &\propto E^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma^*-1}} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

对于磁场, 可利用磁通量守恒, 令

$$B_{\parallel} \propto A^{-1} \quad (30)$$

B_{\parallel} 为平行于喷流的磁场分量。而取 $B_{\perp} \propto p^{1/2}$, 于是

$$B_{\perp} \propto A^{-\Gamma/2 - 2 - \Gamma} \quad (31)$$

显然由(30), (31)式, $\frac{B_{\parallel}}{B_{\perp}} \propto A^{\frac{3\Gamma-4}{4-2\Gamma}}$, 所以在极端相对论性流体情形下 ($\Gamma = 4/3$), $B_{\parallel} \sim B_{\perp}$;

而对于 $\Gamma < 4/3$ 的情形, 喷流中磁场最终以 B_{\perp} 为主。

这样, 通过上面的叙述, 我们可以用两个“绝热指数”(Γ, Γ^*)来描述一维相对论流动下流体物理参数随截面的变化: Γ 和 Γ^* 选择在 $(1, 4/3)$ 的范围内, 可以包括上面研究过的电子-质子流体不同状态下的相对论流动特性(Reynolds (1982))^[6]:

(1) (Γ, Γ^*) = (4/3, 4/3), 代表“热离子”情形, 即电子和质子都是极端相对论性的, 即极端相对论性流体。在这种情形下, 流动的加速快, $\gamma \propto r$ 。电子能量 $E \propto r^{-1}$; 通过绝热膨胀消耗电子和质子的能量来加速流动。

(2) $(\Gamma, \Gamma^*) = (1, 4/3)$, 代表“冷离子”情形, 电子是极端相对论性的, 而离子为非相对论性(自治要求 $k_i < 1,000$)。在这种情形下, $\gamma \approx$ 常数, 以质子的惯性流动为主; 主要消耗电子的能量(电子继续冷却)来维持流动, 但不发生明显加速; 电子能量 $E \propto r^{-1/6}$ 。

(3) $(\Gamma, \Gamma^*) = (1, 1)$, 代表等温情形(Reynolds & Mckee(1980))^[5], $\gamma =$ 常数(惯性流动), 电子能量 $E =$ 常数, 即相对论电子不消耗能量转化为整体动能, 流体没有加速。电子的加速靠流动中出现的不稳定性所消耗的流动动能。

7. 准一维相对论流动中的能量输运问题

根据(2)式, 总能量输运为

$$\mathcal{L}^{(ob)} = Ac\beta T_{00} = Ac\beta e[\Gamma(\gamma^2 - 1) + 1] = Ac\beta(w\gamma^2 - p) \quad (32)$$

于是相应的动能输运或动能光度为

$$\mathcal{L}_{KE}^{(ob)} = Ac\beta[e\langle\Gamma(\gamma^2 - 1) + 1\rangle - \rho_{(ob)}c^2] \quad (33)$$

这里 $\rho_{(ob)}c^2$ 代表观测参考系中的流体粒子的静止质量能量, $\rho_{(ob)} = \rho\gamma$ 。于是(33)式可化为

$$\mathcal{L}_{KE}^{(ob)} = Ac\beta[e_c(1 + k_i)\langle\Gamma(\gamma^2 - 1) + 1\rangle + nm_i c^2\langle\Gamma(\gamma^2 - 1) + 1 - \gamma\rangle], \quad (34)$$

相应地磁场光度(即输运的磁场能量)为

$$\mathcal{L}_B^{(ob)} = Ac\beta w_B^{(ob)} = 2Ac\beta u_B^{(ob)} = Ac\beta \frac{B_{(ob)}^2}{4\pi} \quad (35)$$

因为 $w_B = e_B + p_B = 2u_B$ (取 $p_B = u_B$, u_B 为磁能密度)。

下面讨论动能光度和磁场光度之间的均分问题。

(1) 热离子(极端相对论流体)情形

由于 $\gamma \gg 1$, 可略去粒子的静止质量能量, 故从(34)和(35)我们有

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_{KE}^{(ob)} &\simeq Ac\beta^3 \gamma^2 \Gamma(1 + k_i) e_c \\ \mathcal{L}_B^{(ob)} &= 2Ac\beta u_B^{(ob)} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

因为 $e_c \propto B_{(ob)}^{-3/2} \mathcal{L}_e^{(ob)}$ (其中 $\mathcal{L}_e^{(ob)}$ 为电子的同步加速辐射光度), $u_B^{(ob)} \propto B_{(ob)}^2$, 所以总光度 $(\mathcal{L}_{KE}^{(ob)} + \mathcal{L}_B^{(ob)})$ 在 $\mathcal{L}_B^{(ob)} = \frac{3}{4} \mathcal{L}_{KE}^{(ob)}$ 时为极小, 即 $u_B^{(ob)} = \frac{(1 + k_i)}{2} e_c \gamma^2$ 时动能光度和磁场光度均

分; 或者在磁场垂直于流动方向时, $B_{(ob)} = \gamma B$, 故化到共动系中, 动能光度和磁能光度均分的条件是:

$$u_B = \frac{u_B^{(ob)}}{\gamma^2} = \frac{1}{2}(1 + k_i)e_c \quad (37)$$

(2) 冷离子情形(极端相对论性电子和非相对论性质子)

由于 $\Gamma = 1$, 以质子的惯性运动为主, 故以质子动能的输运为主。由(34)式

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{KE}^{(ob)} &\simeq Ac\beta nm_i c^2 [\Gamma(\gamma^2 - 1) + 1 - \gamma] \\ &= Ac\beta nm_i c^2 (\gamma - 1) \gamma = Apc^3 \beta^3 \gamma^3 / (\gamma + 1) \end{aligned} \quad (38)$$

此时, 磁能光度仍由(35)式给出。由于 $\mathcal{L}_{KE}^{(ob)} \propto B_{(ob)}^{-1}$, 所以总光度在 $\mathcal{L}_B^{(ob)} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{KE}^{(ob)}$ 时极小。因为在 $\Gamma = 1$ 的情形下, 以垂直磁场为主, 所以磁能光度和动能光度的均分条件为

$$u_B = \frac{u_B^{(ob)}}{\gamma^2} = \frac{1}{4} \rho c^2 (\gamma - 1) / \gamma \quad (39)$$

二、一维流动的相对论流体力学方程及其解的研究

上节讨论了准一维稳恒流动下相对论流动特性的描述。在这一节里我们描述相对论流体力学方程，并用它来研究相对论流体一维自由膨胀的动力学（以适应于射电天文学中相对论喷流研究的需要）。这方面的研究主要参考 Vitello & Salvati (1976)^[7]。关于这项研究在射电变源上的应用参见 Vitello & Pacini (1978)^[8]。

1. 相对论流体力学方程

我们假定讨论极端相对论性流体（即电子和质子都是极端相对论性的）情形，即在共动参考系中，主要的能量是粒子动能而不是粒子的静质能量。 $\Gamma=4/3$ ，所以 $w=e+p=4e/3=4p$ 。又假定为理想流体，不考虑粘滞和热传导。此外还假定是理想导体，因此磁场冻结在等离子体流体内，并假定磁场很弱 ($B^2 \ll e$)，不影响流体的动力学过程，故磁场只被动力学膨胀拉伸出去。我们不考虑各种耗散效应，只考虑绝热膨胀。并且我们还要指出，在下面的讨论中，我们不计及观测效应（如光行时间效应），即认为是在本地参考系中研究的。

(1) 能量守恒方程

从运动方程(3)的时间分量，我们得到能量守恒方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\gamma^2 w - p) + \gamma \operatorname{div}(\gamma w \mathbf{v}) + \gamma w \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \gamma = 0 \quad (40)$$

在球面坐标系中，(40)式可表为

$$\begin{aligned} \gamma^2 \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{2vw}{c^2} \gamma^4 \frac{\partial v}{\partial t} + \gamma^2 \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 w v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(w v_\theta \sin \theta) \right. \\ \left. + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}(w v_\varphi) \right\} + \frac{2vw}{c^2} \gamma^4 \left\{ v_r \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

在三维球对称膨胀时， $v=v_r$ ， $v_\varphi=v_\theta=0$ 则(41)式化为

$$\frac{\partial e}{\partial t} + v \frac{\partial e}{\partial r} + w \gamma^2 \left\{ \frac{v}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r} \right\} + 2 \frac{vw}{r^2} = 0 \quad (42)$$

在一维流动下，可把 r 作为一维运动方向，(42)式中的 $2vw/r^2$ 项不再出现，故为

$$\frac{\partial e}{\partial t} + v \frac{\partial e}{\partial r} + w \gamma^2 \left\{ \frac{v}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r} \right\} = 0 \quad (43)$$

(2) 动量守恒方程

从欧勒方程(5)的三个空间分量可以得到动量守恒方程为

$$\gamma w \frac{\partial(\gamma \mathbf{v})}{\partial t} + \gamma w (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\gamma \mathbf{v}) + \gamma^2 \mathbf{v} \frac{\partial p}{\partial t} + \gamma \mathbf{v} (\gamma \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} p) + c^2 \operatorname{grad} p = 0$$

或

$$\gamma^2 \mathbf{v} \frac{\partial p}{\partial t} + \gamma^2 \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} p) + \gamma w \frac{\partial(\gamma \mathbf{v})}{\partial t} + \gamma w \left[\mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \gamma) \right]$$

$$+ \gamma \left(\text{grad} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} \right) + c^2 \text{grad} p = 0 \quad (44)$$

在三维球对称膨胀时 $v = v_r$, $v_\theta = v_\varphi = 0$, 故有

$$\frac{v}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} + \gamma^2 w \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial v}{\partial r} \right] = 0 \quad (45)$$

这个方程对于一维膨胀也适用, 只要把 r 作为一维坐标轴。

(3) 连续性方程

从(4)式得出连续性方程为

$$\frac{\partial(n\gamma)}{\partial t} + \text{div}(n\gamma\mathbf{v}) = 0 \quad (46)$$

在三维球对称膨胀时, 化为

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v \frac{\partial n}{\partial r} + \gamma^2 n \left[\frac{v}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r} \right] + \frac{2v}{r} n = 0 \quad (47)$$

在一维流动下, $\frac{2v}{r} n$ 的项不出现, 变为

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v \frac{\partial n}{\partial r} + \gamma^2 n \left[\frac{v}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r} \right] = 0 \quad (48)$$

(4) 磁场方程

由于假定了磁场很弱, 不影响动力学, 所以在上述运动方程中没有出现磁场。我们需要利用 Maxwell 方程来得到磁场方程:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_{(ob)} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_{(ob)}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_{(ob)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

由于假定为理想导体(共动系中), 故 $\mathbf{E} = 0$ 。所以

$$\left. \begin{aligned} \gamma \mathbf{E}_i^{(ob)} &= 0 \\ \mathbf{E}_\perp &= \gamma \left[\mathbf{E}_\perp^{(ob)} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_\perp^{(ob)} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

或 $\mathbf{E}_\perp^{(ob)} = -\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_\perp^{(ob)}$

由(49)和(50)式, 对于三维球对称膨胀情形($B_i^{(ob)} = B_r^{(ob)}$), 得到磁场方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B_r^{(ob)}}{\partial t} + v \frac{\partial B_r^{(ob)}}{\partial r} + \frac{2v B_r^{(ob)}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial B_\perp^{(ob)}}{\partial t} + v \frac{\partial B_\perp^{(ob)}}{\partial r} + B_\perp^{(ob)} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v B_\perp^{(ob)}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

转换到共动系($B_i = B_i^{(ob)}$, $B_\perp = \frac{B_\perp^{(ob)}}{\gamma}$), 我们有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial t} + v \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial r} + \frac{2vB_{\parallel}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial B_{\perp}}{\partial t} + v \frac{\partial B_{\perp}}{\partial r} + v \frac{B_{\perp}}{r} + \gamma^2 B_{\perp} \left[\frac{v}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

由(52)式和连续性方程(46), 不难得出沿流线

$$\frac{B_{\parallel} B_{\perp}^2}{\rho^2} = \text{const.} \quad (53)$$

故只要定出 B_{\perp} 和 n (或 e), 即可得到 B_{\parallel} 。

在一维流动情形下, (51)和(52)式中正比于 $1/r$ 的项不出现, 故一维流动情形的磁场方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial t} + v \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial B_{\perp}}{\partial t} + v \frac{\partial B_{\perp}}{\partial r} + \gamma^2 B_{\perp} \left[\frac{v}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

以上公式中的 B_{\parallel} 和 B_{\perp} 应理解为磁场的均方根值。

2. 一维自由膨胀的解

Vitello & Salvati^[7]详细地研究了极端相对论流体自由膨胀进入真空时的解, 考察了三维球膨胀和一维膨胀两种情形。由于联系到射电喷流现象, 我们在这里只讨论一维膨胀的结果。Vitello & Pacini^[8]讨论了三维和一维膨胀情形下的同步加速辐射的观测特性。

在对内部包含磁场的相对论等离子体自由膨胀进入真空的情形进行一维动力学处理时, 假定初始时, 设想相对论流体静止地均匀分布在 $0 \leq r \leq L$ 的区域内。考虑在 $t=0$ 时, 撤去约束, 自由膨胀进入真空。在一维膨胀时, 外边界将以接近光速 c 的速度向外运动, 形成一个稀疏波向等离子体内部传播, 传播速度为声速 ($c/\sqrt{3}$)。在任何时刻都出现两个区域:

(1) $t \leq \frac{L}{c/\sqrt{3}}$ 时, 稀疏波向内运动, 尚未到达原点, 稀疏波区域和尚未起动的等离子体

区域之间的分界面在 r^* 处, 这里 $r^* = L - ct/\sqrt{3}$ 。

(2) $t > \frac{L}{c/\sqrt{3}}$ 时, 稀疏波已达原点而形成反射波, 向外运动。反射波速度为 $\frac{v+c/\sqrt{3}}{1+v/\sqrt{3}c}$ 。

反射波和稀疏波的分界面在 $r^* \cong ct + L - 2.92 \left(\frac{ct}{L} \right)^{0.072} \cdot L$ 处 (设 $t \geq \frac{2L}{c}$), 或者分界面到

外表面的间距 $\Delta r \cong 2.92L \left(\frac{ct}{L} \right)^{0.072}$ 。这个宽度随时间变化慢, 因为整个区域都在以接近光速运动。

在稀疏波区域内可以得到解析解 ($r \geq r^*$):

$$\left. \begin{aligned}
 v(r) &= c \left[\frac{r-L}{ct} + 1/\sqrt{3} \right] \left[\frac{r-L}{\sqrt{3}ct} + 1 \right]^{-1} \\
 \gamma(r) &= \frac{3}{2} \left(\frac{r-L}{\sqrt{3}ct} + 1 \right) \left[1 - \left(\frac{r-L}{ct} \right)^2 \right]^{-1/2} \\
 e(r) &= e_0 \left[\left(1 - \frac{v(r)}{c} \right) / \left(1 + \frac{v(r)}{c} \right) \right]^{3/2} \\
 B_{\parallel} &= \text{const.} \\
 B_{\perp}(r) &= B_0 \left[\left(1 - \frac{v(r)}{c} \right) / \left(1 + \frac{v(r)}{c} \right) \right]^{3/2}
 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

在反射波区域，Vitello & Salvati^[7]用特征线方法处理耦合的流体力学微分方程组的数值解。

一维相对论自由膨胀的重要特点是，在反射波形成后，立即在分界面 r^* 处，形成密度的峰值，几乎所有的等离子体能量集中在表面的厚度 Δr 的区域内，以整体运动动能的形式。作为这个能量的量度，可取为 $\gamma^2(r^*) \cdot e(r^*) \cdot \Delta r \text{ oct}^{0.08}$ 。图 3 中给出能量密度的分布轮廓(Vitello & Salvati还给出了粒子数密度，流速和磁场的分布轮廓)。附带指出，这里给出的分布轮廓不是观测者看到的视轮廓，因为观测到的视轮廓实际上要受到光行时间效应的影响。最近 Marscher (1984)^[9]在研究自由膨胀的喷流时，提出横向膨胀将使喷流具有圆锥薄壳的形状。

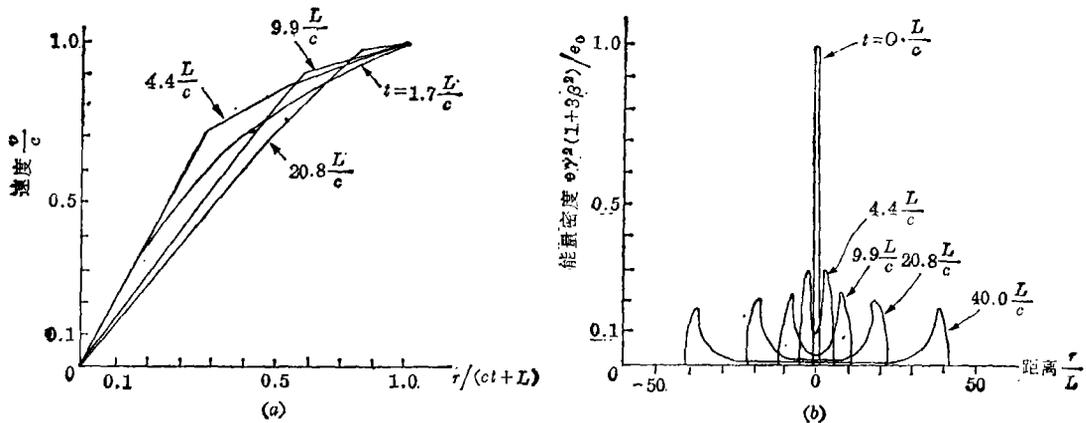


图 3. 一维相对论自由膨胀时的速度和能量的分布。

三、相对论性流体中的激波

在本节中我们考察一维绝热相对论性激波，不考虑磁场的效应。

1. 相对论性激波的基本方程(一维情形)

在激波面参考系中(间断面垂直于相对论性流动方向)，根据能量流密度($w\bar{v}^2\bar{v}$)，动量流密度($n\bar{\beta}\bar{v}^2+p$)和粒子流密度($n\bar{v}\frac{\bar{v}}{c}$)的连续性条件可以得到激波关系为

$$\left. \begin{aligned} w_1 \bar{v}_1 \bar{\gamma}_1^2 &= w_2 \bar{v}_2 \bar{\gamma}_2^2 \\ p_1 + \frac{w_1}{c^2} \bar{\gamma}_1^2 \bar{v}_1^2 &= p_2 + \frac{w_2}{c^2} \bar{\gamma}_2^2 \bar{v}_2^2 \\ n_1 \bar{\gamma}_1 \bar{v}_1 &= n_2 \bar{\gamma}_2 \bar{v}_2 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

这里的上标一号表示激波面参考系中的物理量。下标 1 表示未受激波扰动的介质中的物理量，而下标 2 表示受激波扰动的介质中的物理量。从(56)中消去 \bar{v}_1 和 \bar{v}_2 ，得到绝热激波面方程：

$$\frac{w_1^2}{n_1^2} - \frac{w_2^2}{n_2^2} + (p_2 - p_1) \left(\frac{w_1}{n_1} + \frac{w_2}{n_2} \right) = 0 \quad (57)$$

因为 $w = e + p$ ，(57)可化为通常形式的雨果尼奥方程

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 = \frac{(e_1 + p_1)(e_1 + p_2)}{(e_2 + p_2)(e_2 + p_1)} \quad (58)$$

如果介质 -1 是非相对论性的 ($p_1 \ll e_1$)，则 $w_1 \simeq e_1 \simeq \rho_1 c^2$ 。

从(56)式可得到

$$\frac{\bar{v}_1}{c} = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_1)}{(e_2 - e_1)(e_1 + p_2)}}, \quad \frac{\bar{v}_2}{c} = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_1 + p_2)}{(e_2 - e_1)(e_2 + p_1)}} \quad (59)$$

相对速度

$$\frac{\bar{v}_{12}}{c} \equiv \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}_2}{c} = \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}_2}{c \left(1 - \frac{\bar{v}_1 \bar{v}_2}{c^2} \right)} = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_2 - e_1)}{(e_1 + p_2)(e_2 + p_1)}} \quad (60)$$

$\frac{\bar{v}_1}{c}$ 和 $\frac{\bar{v}_{12}}{c}$ 也就是固定在介质 -1 上的参考系中所看到的激波速度和激波后介质的速度。若

观测系中看到的介质 -1 的速度为 v_1 ，则观测系中激波速度为：

$$\frac{v_1}{c} - \frac{\bar{v}_1}{c} = \left(\frac{v_1}{c} - \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_1)}{(e_2 - e_1)(e_1 + p_2)}} \right) / \left(1 - \frac{v_1}{c} \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_1)}{(e_2 - e_1)(e_1 + p_2)}} \right) \quad (61)$$

在极端相对论性流体下 ($p = e/3$, $w = 4p$),

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{v}_1}{c} &= \sqrt{\frac{3p_2 + p_1}{3(3p_1 + p_2)}}, \quad \frac{\bar{v}_2}{c} = \sqrt{\frac{3p_1 + p_2}{3(3p_2 + p_1)}} \\ \frac{\bar{v}_{12}}{c} &= \sqrt{\frac{(e_2 - e_1)^2}{(3e_1 + e_2)(3e_2 + e_1)}} \\ \bar{\gamma}_1^2 &= \frac{3(3p_1 + p_2)}{8p_1} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

在相对论激波很强时 ($p_2 \rightarrow \infty$, $e_2 \rightarrow \infty$), $\bar{v}_1 \rightarrow c$, $\bar{v}_2 \rightarrow c/3$, $\bar{v}_{12} \rightarrow c$ 。

根据相对论激波两侧能量流和动量流的连续性条件(56)，可以得到：

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\bar{L}}{A} \right) &= w_1 \bar{v}_1 \bar{\gamma}_1^2 = \frac{\sqrt{3} w_1 c}{8p_1} \{ (p_1 + 3p_2)(p_2 + 3p_1) \}^{1/2} \\ \left(\frac{\bar{Q}}{A} \right) &= \frac{w_1}{c^2} \bar{\gamma}_1^2 \bar{v}_1^2 + p_1 = p_1 + \frac{w_1(p_1 + 3p_2)}{p_1} \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

其中 $\left(\frac{\bar{L}}{A}\right)$ 和 $\left(\frac{\bar{Q}}{A}\right)$ 为单位面积上通过的能量流和动量流(激波面参考系中)。在介质-1和-2都是极端相对论性流体的情形下

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\bar{L}}{A}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} c [(3p_2 + p_1)(3p_1 + p_2)]^{1/2} \\ \left(\frac{\bar{Q}}{A}\right) &= \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

2. ρ_2 和 e_2 的公式

利用状态方程(20):

$$\begin{aligned} p_2 &= (\Gamma_2 - 1)(e_2 - \rho_2 c^2) \\ p_1 &= (\Gamma_1 - 1)(e_1 - \rho_1 c^2) \end{aligned}$$

和雨果尼奥方程(58), 可以求得

$$\rho_2 = 2p_2 \left(\frac{p_2}{\Gamma_2 - 1} + p_1 \right) \left\{ - \frac{c^2}{\Gamma_2} [p_2(1 + \Gamma_2) + p_1(\Gamma_2 - 1)] + \sqrt{D} \right\}^{-1} \quad (65)$$

其中

$$\begin{aligned} D &= \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \left\{ c^4 \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \left(p_1 + p_2 \frac{\Gamma_2 + 1}{\Gamma_2 - 1} \right)^2 + 4c^2 \frac{p_2}{\rho_1} \left(p_1 + \frac{p_2}{\Gamma_2 - 1} \right) \left(p_2 + \frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1 - 1} p_1 \right) \right. \\ &\quad \left. + 4p_1 p_2 \frac{\Gamma_1}{(\Gamma_1 - 1)\rho_1^2} \left(p_1 + \frac{p_2}{\Gamma_2 - 1} \right) \left(p_2 + \frac{p_1}{\Gamma_1 - 1} \right) \right\} \quad (66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{p_2}{\Gamma_2 - 1} + \left\{ - \frac{p_2(1 + \Gamma_2) + p_1(\Gamma_2 - 1)}{2\Gamma_2 p_2 [p_1 + p_2/(\Gamma_2 - 1)]} \right. \\ &\quad + \frac{(\Gamma_2 - 1)^2}{\Gamma_2^2} \left[\frac{\left(p_1 + p_2 \frac{\Gamma_2 + 1}{\Gamma_2 - 1} \right)^2}{4p_2^2 \left(p_1 + \frac{p_2}{\Gamma_2 - 1} \right)^2} + \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \cdot \frac{p_2 + p_1 \frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1 - 1}}{c^2 \rho_1 p_2 \left(p_1 + \frac{p_2}{\Gamma_2 - 1} \right)} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{p_1}{c^4 \rho_1 p_2} \left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 - 1} \right) \left(\frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \right) \cdot \frac{p_2 + \frac{p_1}{\Gamma_1 - 1}}{p_1 + \frac{p_2}{\Gamma_2 - 1}} \right] \right\}^{-1} \quad (67) \end{aligned}$$

若介质-1和-2都是极端相对论性时, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \frac{4}{3}$ 。

(65)–(67)式是孔祥言等^[10]得出的。他们利用这些关系式研究了射电星系中热斑的形成机制, 把热斑区域看作是相对论性喷流(束)冲击在外部介质(静止)上所形成的(最初提出这个概念的是 Rees & Blandford^[3])。在那个区域中有双激波形成: 外激波是由于束流冲击在外部介质上形成的, 内激波是由于前面介质的阻挡, 束流受到减速而形成的, 在两激波之间是分界面。在分界面和内激波之间的区域内, 束流的有序动能乱化成为热能, 加速相对论电子和放大磁场, 形成热斑。这种图案可以解释热斑的运动速度和束流对展源供能的要求。

我们还要指出, Rees^[11] 曾考察过相对论喷流中流速不稳定性形成的激波耗散来解释喷流中节点的形成(如 M87 的射电-光学喷流中的节点)。

以上我们对目前射电天文学中涉及到的相对论流体力学的基本理论及其进展作了一个连贯的叙述(主要对于一维情形), 以便提供一个简明扼要的基础材料, 供进一步深入研究之用。单从射电天文学的研究来看, 相对论流体力学尚期待发展, 以便解决诸如相对论喷流的形成和准直过程、喷流和介质的相互作用、不稳定性、耗散过程、磁场作用等问题, 只有在对这些问题有了充分理解之后, 才可望对射电源(特别是致密源)中发生的现象作出更深入的解释。

参 考 文 献

- [1] 钱善璿, 天文学进展, 2 (1984), 131.
- [2] Perley, R. A. et al., *Ap.J.*, 285 (1984), L35.
- [3] Blandford, R. D. and Rees, M. J., *MNRAS*, 169 (1974), 395.
- [4] Wiita, P. J., *Ap. J.*, 221 (1978), 41.
- [5] Reynolds, S. P. and Mckee, S. F., *Ap. J.*, 239 (1980), 893.
- [6] Reynolds, S. P., *Ap. J.*, 256 (1982), 13.
- [7] Vitello, P. and Salvati, M., *Physics of fluids*, 19 (1976), 1523.
- [8] Vitello, P. and Pacini, F., *Ap. J.*, 220 (1978), 756.
- [9] Marscher, A. P., *BAAS*, 15 (1983), 943.
- [10] 孔祥言等, 天体物理学报, 2 (1982), 81.
- [11] Rees, M. J., *MNRAS*, 184 (1978), 61.

(责任编辑 刘金铭)

Elementary Relativistic Fluid Mechanics

Qian Shanjie

(Beijing Observatory, Academia Sinica)

Abstract

In this paper we review the progress in the study of relativistic fluid mechanics and its applications to radio astronomical research. It contains the elementary theory, solutions for one-dimensional flow and relativistic shock waves.