第4卷 第4期 天文学进展 Vol. 4, No. 4
1986年10—12月 PROGRESS IN ASTRONOMY Oct.—Dec., 1986

超导重力仪测定地极坐标的探讨

朱耀仲
(中国科学院测量与地球物理研究所)

提 要

本文探讨了超导重力仪测定地极坐标的基本原理,研究了利用重力变化资料计算地极坐标的方法,并根据目前全世界超导重力仪的分布情况,估计了测定地极坐标的精度。

一、引 言

潮汐影响和地球自转产生的离心力变化将使地面点的重力发生变化。其中,日月引潮力产生的重力固体潮是占主要的,最大的半日和周日潮波振幅均达几十微伽,利用通常的弹性系统重力仪就能观测到这些变化。相比之下,离心力变化引起的重力变化却比较小。地球自转角速度变化引起的重力变化最大还不到0.1微伽,地球瞬时自转轴的摆动对重力变化的影响最大幅度也不超过15微伽。由于传统的机械弹簧重力仪都存在着因弹性疲乏而引起大的零漂,以及仪器观测精度的限制,因此它们还无法检测出这些微小的影响。60年代末,美国研制出了一种超导重力仪[1]。近年来,该仪器又进行了一系列更新换代,一些主要的仪器性能指标有了很大的提高。仪器的内部精度由原来的$\Delta g/g\approx10^{-9}$提高到10^{-11}[2],外部精度在高频部分为±0.1微伽,在低频部分为±0.2微伽。1985年,Richter和Ducarmer et al.已分别利用超导重力仪的记录资料,计算了Chandler摆动引起的重力变化振幅和位相[3],[4]。正是因为超导重力仪具有低噪声低漂移的特性,因此它不仅是目前世界上最先进的重力固体潮观测仪器,而且正在不断地引起天文工作者的注目。利用超导重力仪测定地球自转参数的可能性研究已在USNO进行[5]。

中科院测地所已从美国引进一台超导重力仪,并于1985年底安装调试完毕,投入正式使用。

二、仪 器

超导重力仪的基本原理与普通的重力仪没有原则上的区别。它是用超导线圈所形成的永久磁场来代替机械弹簧。根据超导球在永久磁场中的上下位移,可测出重力变化。为了获得

1986年5月16日收到。

超导状态，整个仪器放在真空保温瓶内，用液态氦使内部温度保持在绝对温度4.2K左右。温度变化稳定在几个μK以内，采用锗电阻温度计可测出1μK的温度变化，这相当于0.01微伽的重力变化。液态氦每10个月灌一次。

观测到的重力随时间的变化是经过一个截止频率f_c为2.26×10^{-3} Hz的电子低通滤波器后输出的，它们以连续曲线的形式绘制在记录纸上，并以每2分钟为采样间隔，用数字形式记录在磁带上。滤波器的截止频率以及采样间隔可自行作适当的调整。仪器的长期飘移速率为±5微伽/年。采用构造人工引力场的方法，可使标定精度达到0.1%。因此，它可用来观测极移、地壳垂直运动、地震预兆和地下水的移动等现象，并可用于地球液核动力学效应等课题的研究。

三、测定地极坐标的基本原理

地球自转角速度变化和地球瞬时自转轴摆动引起的离心力位的变化可用缔合勒让德多项式来表示。首先，我们将地球瞬时自转轴的位置表示为

$$\omega=(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)=\Omega(m_1,\ m_2,\ 1+m_3) \tag{1}$$

其中，Ω为地球自转平均角速度，m_i为无量纲的小量，m_1和m_2描叙极移，m_3描叙自转角速度的相对变化。于是，在考虑m_i的一阶项扰动的情况下，地面点的离心力位的变化为

$$U(r,\varphi,\lambda)=\tfrac{1}{3}r^2\Omega^2\{2m_3[1-P_2(\sin\varphi)]-|m|\,P_2^1(\sin\varphi)\} \tag{2}$$

这里r为该地面点的地心向径，φ和λ分别为纬度和经度(东经为正)，$|m|$为地球自转轴相对于该地面点的瞬时位移，通常也称为极性纬度变化，即：

$$|m|=\Delta\varphi=m_1\cos\lambda+m_2\sin\lambda \tag{3}$$

对于一个无海洋的弹性地球，并注意到$m_3=-\Delta(l.o.d.)/(l.o.d.)$，则相应的重力变化为

$$\Delta g(r,\varphi,\lambda)=\delta r\Omega^2\left[\frac{\cos^2\varphi}{43200}\Delta(l.o.d.)+|m|\sin2\varphi\right] \tag{4}$$

式中$\delta=1+h_2-\dfrac{3}{2}k_2$为二阶重力固体潮因子，对于1066$A$模型，$\delta=1.16$，$\Delta(l.o.d.)$为每天的日长变化量，以时秒为单位。由(4)式可知，利用地球自转参数可求出相应的重力变化的理论值，反之亦然。

(4)式表明，地球自转速率变化的影响在赤道上为最大。当日长变化$\Delta(l.o.d.)$为1毫时秒(相当于$m_3=-1.16\times10^{-8}$)时，相应的重力变化为0.09微伽。在武昌，重力变化的影响为0.07微伽。由此引起的地球表面径向位移将低于毫米级水平(对于弹性地球，表面径向位移1厘米相当于重力变化了6.0微伽。对于刚体地球，径向位移1厘米相当于重力变化了3.1微伽)。目前，利用超导重力仪的观测资料还难以精确地确定如此微小的变化。

根据(3)和(4)式，极移引起的重力变化为

$$\Delta g_p=C(m_1\cos\lambda+m_2\sin\lambda)\sin2\varphi \tag{5}$$

式中，常数$C=3.93\times10^6$微伽。通常，$|m|$的二个相邻峰值的幅度不超过0″.6，在$\varphi=45°$的地方，极移引起的重力变化最大，且$\Delta g_p=11.43$微伽。在两极和赤道上，极移对重力变化没有

影响。在武昌，相应的重力变化为10.01微伽。极移的周期项主要是由周年周期和 Chandler 周期组成。其中，周年周期的振幅和位相比较稳定，二个相邻峰值的幅度约为0″.176，由此引起地面点的重力变化最大($\varphi=45°$)为3.35微伽。Chandler摆动的振幅和位相是随时间而变化的，在本世纪内，一个有代表性的Chandler摆动幅度约为0″.32[6]，相应的重力变化最大为6.10微伽。(5)式就是超导重力仪测定地极坐标的基本公式。

四、资料处理方法

利用记录在磁带上的重力变化资料进行极移分析以前，仪器必须经过精确的标定，并消除长期漂移。通常，这种漂移是一个线性项。然后，以一天为间隔对资料进行采样，对于因地震、断电和液态氦的灌输等引起的坏的资料点，可用样条函数进行内插。磁带上记录的重力变化信号是经过一个电子低通滤波器滤波后输出的，因此，每天的资料应加滤波器引起的线性位相漂移改正，其数值为0°.464/周·天$^{-1}$[7]。每天的资料中，除了周年项和Chandler 周期以外，还包含其他周期分量。重力变化的周年项是极移、固体潮、海潮、大气压力变化和地下水位变化等多种因素影响的混合物。我们应先消除其他因素的影响，仅保留极移引起的周年项。重力固体潮的周年分量S_a波可从理论上精确地计算出来，并可表示为

$$\Delta g_E=1.67(\sin^2\varphi-1/3)\cos(h-P_S)\text{微伽} \tag{6}$$

其中h为太阳平黄经，P_S为近日点的平黄经。海潮的S_a波对重力变化的影响通常表示为

$$\Delta g_O=A_{S_a}\cos(\omega_{S_a}t+\varphi_{S_a}) \tag{7}$$

式中A_{S_a}和φ_{S_a}分别为地方振幅和位相，ω_{S_a}为S_a波的角频率。大气压力变化和重力变化密切相关，Warburton et al.根据压力和重力变化资料的分析表明，压力变化是地方重力随机波动的主要原因。从他们导出的经验公式中，得到长周期的重力变化改正为0.30微伽/毫巴。在假设二者是同位相的情况下，采用此公式可使压力变化对重力变化的影响修正到10%以内。Piñon Flat和La Jolla两地的类似结果表明，这个修正公式不会随地点和时间的变化而出现大的差异[8]。目前，气压记录值的精度达0.1毫巴，根据仪器周围的气压读数，可对重力变化资料进行修正。我国大气压力的周年变化很大，幅度约为20.6毫巴[9]，由此引起重力变化的幅度为6.18微伽。地下水的影响对具有高灵敏度的超导重力仪是不可忽略的。设某一水域的体积为V，它对测站产生的引力位为

$$\psi=G\rho_W\int_V\frac{dV}{L} \tag{8}$$

其中G为引力常数，ρ_W为水的密度，dV为微分体元，L为dV至测站的直线距离。如果该水域的平均水位变化了dH，则相应的重力变化为

$$\Delta g_u=\delta\left[2\pi G\rho_W H\left(\frac{1}{\sqrt{r_2^2+H^2}}-\frac{1}{\sqrt{r_1^2+H^2}}\right)dH\right]\varepsilon \tag{9}$$

式中H为测站和该水域的平均水位之间的高差，r_1和r_2分别为平面上测站至水域的最近和最远距离，ε定义为

$$\varepsilon=\begin{cases}1, & \text{在该水域内}\\ 0, & \text{在其他地方}\end{cases}$$

由(9)式可知，只要根据实测到的水位变化dH，便可计算出相应的重力变化。武昌观测站离长江和东湖很近，长江和东湖水位的年变化平均约分别为12米和1米。张赤军根据公式 $\Delta g_u=2\pi G\rho_W H\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)dH$，求出长江和东湖水位变化的影响分别为0.27和0.32微伽。二者的最大影响为0.59微伽。扣除上述四项影响，可以认为重力变化的周年项主要是极移引起的。除周年和Chandler周期以外，资料中的其他周期项可通过一个带通滤波器的滤波来消除。

为了避免Chandler摆动的振幅和位相随时间而变化的特性不因滤波而受到歪曲，所以采用的滤波器应尽量同时满足通带中的振幅响应为一常数，位相响应为线性。为此，可选取Butterworth 带通数字滤波器[10]，这是一种递归滤波方法。该滤波器十分接近理想滤波器的性能，它的增益随着远离截止频率而迅速地单调减小，无论在通带内外，振幅响应没有任何波动，位相响应也较好。因此，它在地球物理的数字滤波中得以广泛应用。

Chandler摆动周期是随时间缓慢变化的。目前的周期约为434平太阳日[11]，即1.188年。考虑到Chandler摆动的频谱较宽，所以带通截止频率取$f_1=0.780$和$f_2=1.050$周/年。根据周年和Chandler摆动频率处的重力变化振幅，应采用一个12阶带通滤波器。该滤波器在Chandler频率处的增益为1，在周年频率处的增益为0.996(相当于衰减0.04dB)。经双线性变换后，该滤波器可表示为

$$\widehat{H}(z)=\prod_{k=1}^{3}\frac{A(1-Z^2)}{b_{K0}^{(1)}+b_{K1}^{(1)}Z+b_{K2}^{(1)}Z^2}\ \frac{A(1-Z^2)}{b_{K0}^{(2)}+b_{K1}^{(2)}Z+b_{K2}^{(2)}Z^2} \tag{10}$$

其中：

$$\begin{cases}b_{K0}^{(j)}=(A-\mathrm{Re.}\ S_K^{(j)})^2+(\mathrm{Im.}S_K^{(j)})^2\\ b_{K1}^{(j)}=2(\ |S_K^{(j)}|^2-A^2)\\ b_{K2}^{(j)}=(A+\mathrm{Re.}S_K^{(j)})^2+(\mathrm{Im.}S_K^{(j)})^2\end{cases}\qquad j=1,2 \tag{11}$$

式中，$S_K^{(2)}$和$S_K^{(2)}$是$S^2-i\beta_K S+q^2=0$的根，$\mathrm{Re.}S_K^{(j)}$、$\mathrm{Im.}S_K^{(j)}$和$|S_K^{(j)}|$分别表示$S_K^{(j)}$的实部、虚部和模，且

$$\begin{cases}\beta_K=\exp\left(i\frac{2K-1}{12}\pi\right)\\ A=[\mathrm{tg}(\pi\Delta f_2)-\mathrm{tg}(\pi\Delta f_1)]^{-1}\\ q^2=A^2\mathrm{tg}(\pi\Delta f_1)\mathrm{tg}(\pi\Delta f_2)\end{cases} \tag{12}$$

这里Δ为资料采样间隔。(10)式中的Z变换定义为$Z=\exp(-i2\pi\Delta f)$。滤波器的频率函数(10)式可写为

$$\widehat{H}(Z)=\sum_{\tau=0}^{12}a_\tau Z^\tau/(1+\sum_{\tau=1}^{12}b_\tau Z^\tau) \tag{13}$$

当τ为奇数时，$a_\tau=0$。设重力变化的输入形式为$x_t(t=1, 2,\cdots, n)$，根据Z的逆变换，相应的滤波器输出为

$$y_t=\sum_{\tau=0}^{12}a_\tau x_{t-\tau}-\sum_{\tau=1}^{12}b_\tau y_{t-\tau} \tag{14}$$

由(10)式可知，该滤波器可分解成六个含有二个极点的子滤波器的串联。对每个子滤波器参数判别表明，该滤波器是稳定的。通带内任一频率信号经滤波后产生的位相漂移可通过模拟一个相同频率的正弦波，根据滤波输入和输出的位相差来确定，并对滤波输出进行位相漂移改正。

利用(14)式进行滤波，需要事先知道12个初始值y_0，y_{-1}，…，y_{-11}。这些初始值可借助某个精确的地极坐标系统(例如BIH系统)的地极坐标，由(5)式计算出对应测站的重力变化值，作为我们逆归滤波的初始值。

经过上述带通滤波后，可以认为，资料中只包含周年周期和Chandler周期成份，而且它们是由于极移引起的。原则上只要有不在同一经圈上，且$\varphi\neq 0$或90°的二台超导重力仪观测资料，便可求解地极坐标m_1和m_2。当有N台($N>2$)仪器时，可用最小二乘法求解。由(5)式知，相应的法方程为

$$\left\{\begin{array}{l} m_1C^2\sum\limits_i\cos^2\lambda_i\sin^2 2\varphi_i+m_2C^2\sum\limits_i\cos\lambda_i\sin\lambda_i\sin^2 2\varphi_i=C\sum\limits_i\Delta g_i\cos\lambda_i\sin 2\varphi_i \\ m_1C^2\sum\limits_i\cos\lambda_i\sin\lambda_i\sin^2 2\varphi_i+m_2C^2\sum\limits_i\sin^2\lambda_i\sin^2 2\varphi_i=C\sum\limits_i\Delta g_i\sin\lambda_i\sin 2\varphi_i \end{array}\right. \tag{15}$$

m_1 和 m_2 的权重分别为

$$\left\{\begin{array}{l} P_{m_1}=C^2\left[\sum\limits_i\cos^2\lambda_i\sin^2 2\varphi_i-\dfrac{\left(\sum\limits_i\cos\lambda_i\sin\lambda_i\sin^2 2\varphi_i\right)^2}{\sum\limits_i\sin^2\lambda_i\sin^2 2\varphi_i}\right] \\ P_{m_2}=C^2\left[\sum\limits_i\sin^2\lambda_i\sin^2 2\varphi_i-\dfrac{\left(\sum\limits_i\cos\lambda_i\sin\lambda_i\sin^2 2\varphi_i\right)^2}{\sum\limits_i\cos^2\lambda_i\sin^2 2\varphi_i}\right] \end{array}\right. \tag{16}$$

欲使m_1和m_2等权且权重最大，应满足台站的经度在全球均匀分布，且仪器位于中纬度($\varphi=$45°)。

五、讨　　论

长期以来，地球自转参数的测定主要是依靠天文手段。目前，国际上已经根据较长时期的超导重力仪观测资料，得到Chandler摆动引起的重力变化振幅和位相，它们与天文观测结果很符合[4],[12]，但用于测定瞬时地极坐标的成功例子尚未见到。原则上，利用单台超导重力仪是无法精确测定地极坐标的。当然，我们也可借助于单架经典天文仪器测定地极坐标的经验，采用奥洛夫方法计算地极坐标。但由于奥洛夫方法的缺陷，往往使单站测定地极坐标的精度难以超过0″.03。

目前，全世界已有五台超导重力仪正在进行正常观测，这些仪器的分布情况列在表1。由表1可见，西德和比利时两台仪器的经度比较接近，武昌的一台和美国两台仪器几乎分别位于它们东西各120°的经圈上，且五台仪器都处在30°—51°的中纬度带内。利用这五台仪器的重力变化观测资料测定地极坐标是比较有利的。它们确定地极坐标的权重之比为$P_{m_2}/P_{m_1}=$0.854，m_1的权重比m_2大17%。假如重力变化Δg的观测误差为±0.2微伽，则五台仪器系统确定m_1和m_2的中误差分别为$M_{m_1}=\pm 0''.0071$和$M_{m_2}=\pm 0''.0077$，m_1的中误差比m_2小8%。

表1 全世界超导重力仪分布情况

台 站	仪器数量	经 度	纬 度
美国加利福尼亚大学	2	116°.46W	33°.59N
西德应用大地测量研究所	1	8°.61E	50°.23N
比利时皇家天文台	1	4°.36E	50°.80N
武昌测地所	1	114°.33E	30°.58N

如前所述，在一个无海洋的弹性地球模型中，极移引起的重力变化可由(5)式表示。在考虑海洋的影响时，极移产生的离心力位将使海洋发生形变，形变后海平面高度的变化又使地面点产生附加的重力变化。这种变化可利用潮高和重力格林函数的褶积积分来求得。地幔的滞弹性使得Love数和重力固体潮因子 δ 增大，并变为复数。Wahr的计算结果表明，海洋的平衡响应和地幔滞弹性对极移引起的重力变化的影响是可以忽略的[12]。所以，目前可认为，极移和地面点重力变化的理论表达式((5)式)是适用的。

利用超导重力仪测定地极坐标的精度主要取决于对仪器系统差的分析和消除。低噪声和高灵敏度的仪器往往对微小的扰动作出响应，并使真正的重力变化和仪器系统误差难以完全区分。超导重力仪的仪器系统差来源主要是由标定、打时号、补偿气温气压影响和记录非线性等方面因素组成。它们对测定地极坐标的影响主要反映在周年项中。通过一段时间的测定结果与BIH 系统地极坐标的比较，可对超导重力仪测定的地极坐标进行系统改正。可以期望，在不久的将来，超导重力仪将成为一种新的高精度的测定地极坐标的手段。

本文是在韩天芑先生的启发和指导下完成的，我所一室的部分同志曾给予热情的帮助，在此深表感谢。

参 考 文 献

[1] Prothero, W. A. and Goodkind, J. M., *The Rev. of Scient. Instrum.*, 30 (1963), 9.
[2] Warburton, R. J., Beaumont, C. and Goodkind, J. M., Geophys. *J. Roy. Astron. Soc.*,43 (1975), 707.
[3] Richter, B., The spectrum of a registration with a superconducting gravimeter, in Proceedings of the 10th International Symposium on Earth Tides, Spain, (1985).
[4] Ducarme, B., Van Ruymbeke, M. and Poitevin, C., Three years of registration with a superconducting gravimeter at the Royal Observatory of Belgium, in Proceedings of the 10th International Symposium on Earth Tides, Spain, 1985.
[5] Hemmleb, G., 31. Time, in Proceedings of the 19th IAU General Assembly, India, (1985).
[6] Dickman, S. R. and Geophys. *J. Roy. Astron. Soc.*, 81 (1985),157.
[7] Warburton, R. J. and Goodkind, J. M., *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 52 (1978), 117.
[8] Warburton, R. J. and Goodkind, J. M., *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 48 (1977), 281.
[9] 朱耀仲，天文学报，27 (1986), 2.
[10] 程乾生，信号数字处理的数学原理，石油工业出版社，(1979).
[11] Smith, M. L. and Dahlen, F. A., *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 64 (1981), 223.
[12] Wahr, J. M., *J. Geophys. Res.*, 90 (1985), B11,9363.

(责任编辑 谢应纯)

On Determining Polar Motion by Superconducting Gravimeter

Zhu Yaozhong

(Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica)

Abstract

The basic principle and calculating method of determining polar motion by superconducting gravimeter is studied in the paper. The possible accuracy of determining polar motion is estimated according to the actual distribution of the superconducting gravimeter in the world.