第2卷 第4期 天 文 学 进 展 Vol. 2, No.4
1984年10—12月 PROGRESS IN ASTRONOMY Oct.—Dec., 1984

时空的奇异性

梁灿彬
(北京师范大学物理系)

提 要

尽管多年来人们已经熟知爱因斯坦方程的许多精确解都是奇异的，然而，直到1965年，两个基本问题一直没有答案：(1)我们的宇宙真有一个初始奇点吗？(2)一个质量足够大的星体坍缩的最后结局一定是一个奇点吗？1965年以前，许多物理学家和天文学家把奇异性的存在归因于这些解的严格对称性。由于任何实际的物理情况都不会存在严格的对称性，因而他们认为任何真实的时空都是不会存在奇点的。然而，Penrose和Hawking在1965—1970年所证明的几个奇异性定理断言，在满足某些合理的条件的情况下(这些条件不包括任何有关对称性的要求)，我们的宇宙的初始状态以及质量足够大的星体坍缩的最后结局都必然存在奇异性，从而对上述两个问题给出了肯定的答案。

本文的第一部分介绍奇异性的定义。文中详细阐述了给“时空的奇异性”下一个严格定义的主要困难所在，并介绍了从“测地不完备性”出发给“奇异性”下的定义。本文第二、三部分分别介绍奇异性定理和“宇宙监督假设”，后者是经典广义相对论中至今仍未解决的最重要问题之一。本文最后一部分阐述了给奇异时空附加一个“奇异边界”的想法及其遇到的困难。

一、奇异时空

人们早就知道爱因斯坦方程的一些重要的严格解(如史瓦西解及Robertson-Walker宇宙模型解)都具有奇异性。时空的奇异性问题是广义相对论中很重要而又很困难的一个问题，对天体物理学(特别是宇宙的起源和坍缩星体的归宿)也有重要的意义。为了讲清这个问题，首先要给“奇异时空”或“时空的奇异性”下一个明确的定义。

“奇异性”一词在广义相对论创立之前早已存在于数学和物理之中。例如，一个静止点电荷q的库仑场强$E=q/r^2$，若问$r=0$那一点处的场强值，回答就是“没有意义”，或说：“沿任一曲线趋近$r=0$的点时，E值都趋于无穷。”于是，人们就把$r=0$的点称为该静电场的奇点，或说该静电场在该点存在奇异性。但是，在把“奇点”或“奇异性”等词汇借用来描写广义相对论的类似情况时，问题就远不这样简单。关键在于：所谓物理，实际上就是研究物理客体(包括粒子、连续介质和场)在某一时空背景上的演化规律的学问。作为物理客体的各种场可以统称为动力学场。对于非广义相对论的物理，人们自觉或不自觉地默认时空背景都是平直时空

1984年8月31日收到。
本文系在上海天体物理前沿讨论会上的报告。

(由平直度规 η_{ab} 来描述)。所谓奇异性，通常是指所研究的动力学场在平直时空内某点（或某些点)上表现不良(例如没有意义)，而时空背景本身在该点则是意义明确、表现良好、毫不奇异的。因此，我们能清楚地说出动力学场在哪一个“时空点”上是奇异的。但是时空的奇异性则比动力学场的奇异性复杂得多。按照广义相对论的基本观点，某一时空是指某一流形M及定义于其上的某一度规场 g_{ab} 的组合，简记为(M,g_{ab})。g_{ab} 必须满足如下两点要求：(i)它不是正定度规而是所谓罗仑兹度规，即号差为－＋＋＋(或＋－－－)的度规。这是一个自然的要求，连平直时空的度规 η_{ab} 也不例外。(ii)它在M上各点都表现良好(有意义，连续，甚至若干阶可微等)。这个要求也是自然的。设想在某一“时空”$(M,\ g_{ab})$中存在某点p，度规 g_{ab} 在其上竟没有意义，那么在该点上就无法研究物理，因为任何物理场的运动规律都要用微分方程表示，而度规没有意义也就谈不上微分。同时，该点上的测量也会由于度规没有意义而变得毫无意义(人们对这种“怪现象”不太熟悉，是因为他们常常只研究平直时空背景上的物理，而平直度规 η_{ab} 在每一时空点上都是表现良好的)。因此，广义相对论中有一个基本约定：凡是 g_{ab} 表现不良的点一律要从时空中删去。今后当用(M,g_{ab})代表某一时空时，M 只包含 g_{ab} 在其上表现良好的点。

现在可以看出定义时空奇异性的困难所在了：在非广义相对论物理中，时空背景非常清楚，我们可以指着某一时空点说：“因为所研究的动力学场在这点上表现不好，所以这是该动力学场的一个奇点。”但当问题涉及时空的奇异性时，讨论的对象就是时空本身，于是“动力学场”和背景场都是 g_{ab}。如果 g_{ab} 在某“点”上表现不良，该“点”就连作为时空中的一个点都没有资格，又怎能指着它说“这点就是时空的奇点”呢？为了摆脱这一困难，只有从别的角度出发来定义时空的奇异性。一个巧妙的定义是由下述想法诱发的：既然奇异时空必然有一些点被删除掉，在某种意义上说这个时空就是“不完备的”。如果能找到某种方法从理论上判断一个时空是否完备，亦即判断一个时空是否有某些点被删掉，就可以区分奇异时空与非奇异时空。先以较简单的欧氏空间(正定平直度规)为例。在一个完备的欧氏空间中的任一条曲线，只要允许它无限延伸，其长度总是无限的。但是如果在欧氏空间中挖去一点p，原来经过p点的每条曲线的长度就变得有限(至少从指向p点的方向来量度是如此)。可见，如果空间中存在一条(或以上)长度不为无限的曲线，就说明这空间有某些点被删去。然而这种方法还不能直接推广到时空中去，因为时空的度规是罗仑兹的，罗仑兹度规的一大特点是存在一类特殊的曲线——类光曲线，它们的固有长度(固有时)恒等于零。与此对应，时空中也存在长度任意接近于零的类时曲线，如图1所示(其中每一小段都很接近类光曲线)。因此，时空中存在长度有限的类时或类光曲线不足以说明时空中有些点被删掉。但由广义相对论可知，真正能够反映类光测地线的长短的是另一种长度概念，这就是仿射长度(不等于零)，类光曲线越长，其仿射长度越大。同样，类时测地线也可用仿射长度来度量。以平直时空为例，它里面任何一条类时或类光测地线的仿射长度都是无限的。但如果挖去一点p，原来经过p的测地线的仿射长度就变为有限。仿射长度有限的测地线叫做不完备测地线，具有一条(或以上)不完备测地线的时空叫做测地不完备时空。不完备

图1 时空中长度任意接近于零的类时曲线。

测地线的存在可以看做时空中删去某些点的标志。于是可得以下定义：

如果时空中存在一条（或以上）不完备的类时或类光测地线，就称这个时空为奇异时空，或说这个时空具有奇异性(具有奇点)。

史瓦西时空、Robertson-Walker 宇宙以及许多被公认为奇异的时空都满足这一定义。

然而这一定义也有缺点。首先，它的"打击面"过宽。一个本来并不奇异的时空，如果人为地挖去一个点，按上述定义它就成了奇异时空，这自然不是我们希望的。为了克服这个缺点，可以在定义中加上一个限制：所讨论的时空要求是不可延伸的。所谓不可延伸，就是不能通过添加若干个点的办法使它变为更大的时空。如果在一个不奇异的时空中人为地挖去一点，由于这个点完全可以被重新添上，从而这个人为地挖去一个点的时空就不是不可延伸的，于是就不能套用这个定义得出这是个奇异时空的结论。

如果一个不可延伸的时空中存在不完备类时测地线，从物理上来看它的确是非常奇异的：一个以一条不完备测地线为世界线的自由下落观测者在有限的时间(根据他自己的钟)内竟会在时空中消失！然而也存在这样的时空(Geroch 在1968年给出过一个例子[1])：它不具有任何不完备的测地线，但却具有一条奇怪的非测地类时曲线，它的固有长度是有限的，它的 4 维加速度(的大小)是有界的。于是，一个观测者坐在一个适当的飞船中沿这条曲线旅行（以这条曲线为自己的世界线)，经过有限的时间以后竟会在时空中消失！(曲线的 4 维加速度是有界量说明飞船只须有限的燃料就可走完这条曲线，而这样的飞船在原则上总是可以找到的；曲线的固有长度有限则说明这个观测者在自己的钟所指示的有限时间内可以走完这条曲线，从而在时空中消失)。这样的时空在物理上是奇怪得足以称为奇异时空的，但按上述测地不完备的定义，它却不是一个奇异时空！这说明上述定义也有"打击面"过窄的缺点。

虽然上述定义有这样那样的缺点，但因为除少数很特殊的情况外，由这个定义判断为奇异的时空与物理直觉上的奇异时空一致，而且用起来比较方便，所以是目前用得最多的一个定义。后面介绍的奇异性定理所证明的必然存在的奇异性就是以这个定义为准的。

由于史瓦西奇异性和大爆炸奇异性都与曲率发散有关，人们自然想到用曲率的发散性来定义时空的奇异性。但是研究表明，这种做法遇到一些基本的困难[1],[2]，因此一般不这样做。然而，在根据测地不完备性确定了时空存在奇异性之后，倒应该进一步追问：曲率在趋近奇点时是否发散？研究表明，多数情况下是发散的，但也存在不发散的情况。对于曲率发散的奇点，我们可称之为曲率奇点，或说时空存在曲率奇异性，详见〔2〕。

以上谈到的都是时空内在的奇异性(内禀奇异性)，根本不涉及坐标奇异性的问题。所谓坐标奇异性是指如下情况：度规 g_{ab} 作为一个张量场在某点表现良好，但由于所选的坐标系在该点表现不好，所以度规张量在该坐标系中的分量在该点表现不好。史瓦西时空中 $r=2M$ 的点就是这种情况的典型例子。坐标奇异性完全是由于坐标系选择不当所致，通过重新选择适当的坐标系就可以消除，根本不能归咎于时空本身的(内禀的)性质。因此，每当我们谈及时空的奇异性时，都与坐标奇异性毫无关系。

二、奇异性定理

由于时空奇异性在物理上带来许多问题，长期来许多物理和天文学家都希望(甚至认为)在真实的物理世界中并不存在奇异时空。否定时空奇异性的一个重要理由是：爱因斯坦方程的几个有奇异性的解都具有一定的对称性，例如史瓦西解有球对称性，Robertson-Walker解有空间均匀及各向同性的对称性。实际情况总与严格的对称性有所偏离，这种偏离在一般情况下虽然可能无关紧要，但在某些敏感的问题上却可能"差之毫厘，失之千里"。例如，考虑到这种偏离对称性的因素，奇异性在爱因斯坦方程的解中可能根本就不出现。这固然是否定时空奇异性的一个重要理由，但它只是一种猜测，并未证明只要偏离对称性就一定没有奇异性(由于偏离对称性时爱因斯坦方程的解很难求得，所以很难直接证明)。于是，两个重要的难题摆在了物理学家和天文学家面前：(i)如果放弃空间均匀和各向同性的假定，我们的宇宙仍然会起源于某种初始奇异性吗？(ii)如果放弃球对称的条件，质量足够大的星体引力坍缩的归宿一定是一个(终结)奇异性吗？

为了回答这两个问题，就是说，为了弄清时空奇异性是否如此紧密地依赖于对称性，Penrose和Hawking做了大量的开拓性的工作，终于证明了几个"奇异性定理"，否定了时空奇异性来源于对称性的猜想，对以上两个问题给出了肯定的回答。第一个奇异性定理是Penrose在1965年发表的[3]，大意是：在满足某些合理条件的前提下，在任何星体的引力坍缩过程中(不一定是球对称坍缩)，只要出现一种特殊的曲面——陷获面(trapped surface)，时空奇异性就一定存在。陷获面是这样一个二维类空闭曲面T(最常见的是球面)，从它上面任一点向内及向外发出的两列光波，下一时刻的波前(S_1及S_2)的面积都比T的面积小。这在直观上是很难想象的，因为日常生活中没有这种现象。但是球对称坍缩的星体在坍缩到一定程度(引力场足够强)时却的确会出现这种曲面。图2是星体球对称坍缩的时空图(采用Eddington超前坐标)，阴影部分代表坍缩星体的内部(由图可见星体表面积逐渐变小，最后缩为一点——奇点)，阴影以外的时空由史瓦西外解描述。非阴影部分的类光测地线可分为"内向的"和"外向的"两组。每条"内向的"类光测地线都是45°角的直线，而"外向的"类光测地线则是各种曲线，其中一条(直线)恰好在视界之内(这是自然的，因为视界是一个类光超曲面，是以类光测地线为母线生成的)。虽然这组测地线称为"外向的"，但是在视界以内，它们也是偏向奇点一侧。

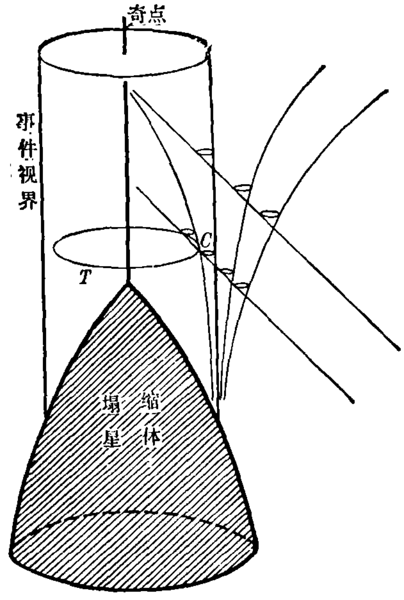

图2　星体球对称坍缩的时空图(图中空间部份被压缩掉一维)。圆周(实际是球面)T是一个陷获面。

由这两组类光测地线可以得出若干个有代表性的点的局部光锥，如图所示。请注意视界上的点的局部光锥与视界相切并且整个处于视界之内。由于类时曲线一定在光锥以内，所以任何类时曲线一旦到达视界，就只能不断向奇点倾斜，直至“到达”奇点(无限地接近奇点)。这正是视界具有“单向膜”性质的关键原因。图中的圆周 T 就是一个典型的陷获面（由于空间被压缩掉一维，圆周就代表球面)。设 T 上的一点 C 向内及向外各发一列光波。由于过 C 点的两条类光测地线都向奇点一侧倾斜，下一时刻的两个波前 S_1 及 S_2 的面积便都比 T 的面积小，如图 3 所示。图中的 4 个大小不同的圆周分别表示位于视界外、视界上及视界内的 4 个点所发的光波在下一时刻到达的位置。

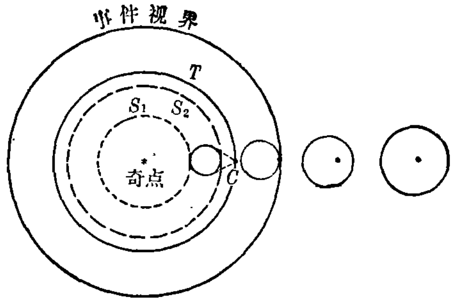

图 3　这是一个空间图而非时空图，表示视界外、视界上和视界内的几个点所发光波在下一时刻的波前。注意 C 点所发光波的波前不把 C 点包在里面，这就决定了从 T 向内、外发出的两列光波的波前 S_1 及 S_2 的面积都比 T 的面积小。

以上谈的是星体球对称坍缩中出现的陷获面。可以证明，偏离球对称的坍缩（只要偏离得不十分过份)也一定会出现陷获面。因此，如果能证明有陷获面就一定有奇异性，就等于证明了非球对称坍缩的结果必然也存在奇异性。这正是 Penrose 第一个奇异性定理的核心。他的定理是：在满足某些合理的条件时，如果时空存在一个陷获面，该时空就一定存在奇异性。

自从 Penrose 的定理发表之后，几个名家又用类似的方法证明了几个奇异性定理。例如，Hawking 在1967年发表的定理[4] 表明：在某些合理的条件下，宇宙一定存在着初始奇异性。Penrose 和 Hawking 的定理都表明：即使不存在对称性，星体坍缩的归宿及宇宙的初始状态仍然存在奇异性，从而解决了长期争论的一个大问题。奇异性定理有许多个，其间的主要差别是条件及结论的强弱不同。1970年，Penrose 和 Hawking 合作发表了一个所要条件最少、结论的普适性最强的奇异性定理[5]，把这方面的工作推到了一个高峰。以后虽然还有人从事这方面的研究，但无非是进一步减弱条件等“打扫战场”性的工作而已。

应该指出，奇异性定理所证明存在的是按测地不完备性定义的奇异性。至于它们是否一定曲率发散，定理毫不涉及。此外，定理也基本上不涉及对与这些奇异性有关性质的判断，因此可以说它们是纯粹的“奇异性的存在性定理。”这是这些定理的主要弱点所在。

最后顺便说明，这些奇异性定理的证明含有很浓的数学味道，大量使用了近代整体微分几何的技术。应该说，广义相对论中的“整体技术”正是在证明这些定理的过程中得到长足的发展的。

三、宇宙监督假设(Cosmic censorship hypothesis)

奇异性定理证明了时空奇异性的存在，给物理学家和天文学家提出了一个难题。由于时空奇异性太“奇”，过去一些物理观念就难以与之协调。例如，一个熟知的物理规律是：知道某

一时刻整个空间中电磁场的状态以及场源的分布和变化，便可预言以后任一时刻空间中的电磁场。对其他场也有类似结果。用四维语言来表达就是，如果时空中的一个类空超曲面 Σ（相当于某一时刻的整个空间）上的场的情况（初始条件）已知，就可以预言整个时空的场的情况。但奇异性的存在却使得这种"可预言性"受到威胁。设时空中有一个奇点 s（图 4）。虽然某一物理场在类空超曲面 Σ 上的情况已知，也无法预言场在时空中某些点（如 p 点）的情况，因为从 s 点（严格说是指时空中任意接近 s 的点）所发出的信号可以传到 p 点（因而影响 p 点的情况）。假定从 s 发出一个定时炸弹，其世界线是类时曲线 γ，它可能在 p 点爆炸，而这一情况是 Σ 上所有初始数据所不能预言的。这样，不是很难研究物理了吗？为了摆脱这一困难（以及出于其他一些物理上的考虑），Penrose 在1969年提出了著名的"宇宙监督假设"[6]，其通俗表述是：在真实的物理世界中，裸奇点永不存在。所谓裸奇点，是指奇点不能被一个适当的事件视界所包围，因而它发出的信号可以达到无限远处的观测者。史瓦西奇点是一个非裸奇点的例子。由于非裸奇点被视界包在内部（如图 2 那样），它对洞外的任何观测者都不会发生影响，于是图 4 的情况不会出现（至少在黑洞以外，过去的一切物理观念仍然有效）。实际上，所谓黑洞就是这样一个时空区域，它的边界是事件视界，而且奇点被包在视界以内（即在黑洞区以内）。如果只有奇点而没有视界，或者虽有视界但有些奇点位于视界之外，这些奇点就称为裸奇点，这时就不能说有一个黑洞。就是说，裸奇点的存在与黑洞的存在是不相容的。奇异性定理只保证星体坍缩的结果必有奇点存在，但到底是出现黑洞（包在视界内的奇点）还是裸奇点，定理是全然管不了的。史瓦西解的本身表明球对称坍缩的结果一定是黑洞，但非球对称坍缩呢？奇异性定理只肯定它一定有奇点，但丝毫不保证它不是裸奇点。宇宙监督假设提出的主要目的就在于说明质量超过某一限度的星体坍缩的结果一定是黑洞而不是裸奇点，可惜这个假设至今尚未得到严格的证明。

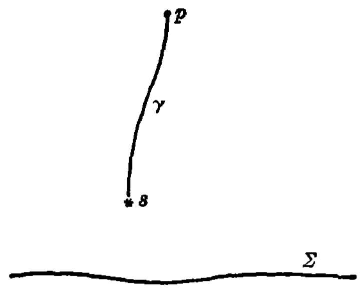

图 4 由于存在奇点 s，p 点的情况不能由类空超曲面 Σ 上的初始条件所预言。

常会听到这样的问题：大爆炸是否裸奇点？回答是：以上黑洞及裸奇点的定义以及"不是黑洞就是裸奇点"的提法都是只对渐近平直时空才有意义的（因为定义中用到"无限远"的概念，而这概念只对渐近平直时空才有确切意义）。任何星体坍缩所对应的都是渐近平直时空，因此都可用这种语言来讨论。但 Robertson-Walker 宇宙模型不是一个渐近平直时空，所以根本不能问"大爆炸是裸奇点吗？"这样一类的问题。实际上，Penrose 是肯定大爆炸的存在的，他的宇宙监督假设当然不是用来否定大爆炸奇异性的。

Penrose 后来对裸奇点的问题又做过许多进一步的思考。他觉得即使奇点被包在视界以内也不能完全解决问题。例如，如果图 4 中的奇点 s 被一个视界所包围，而 p 点在视界之外，以上提到的困难自然不会发生；但如果视界内存在一点 q，它能看见 s（即从 s 发出的信号能到达 q），困难就依然存在。为了进一步否定这种可能性，Penrose 后来用修改裸奇点定义的方式修改了他的宇宙监督假设[7,8,9,10]。首先，他把裸奇点的定义从"（视界外）无限远处观测者看不到的奇点"改为"任何观测者都看不到的奇点"；其次，与此相应，他也取消了裸奇点只对渐

近平直时空才有意义的提法，从而对任何时空都可以问及一个奇点是否是裸奇点。然而，照这样改法，大爆炸也成为裸奇点了。为了避免这一结果，他又加上一个限制，最终得出如下定义：如果存在一条类时曲线，其上某点 p 能看到奇点 s，而线上另有一点 q 能被 s 所看到(图5)，则 s 称为一个裸奇点。而“宇宙监督假设”的提法则不变：在一个真实的时空中不存在裸奇点。为区别起见，他把这样定义的奇点叫做“局部裸”的奇点，把用这种裸奇点定义的宇宙监督假设叫做强宇宙监督假设。相应地，用原来的裸奇点定义的宇宙监督假设叫做弱假设。但应注意，强假设成立并不一定能推出弱假设成立。

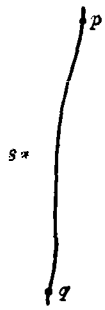

图5　奇点s是一个“局部裸”的奇点。

必须说明，爱因斯坦方程有不少解是存在裸奇点(按某一定义或另一定义)的。宇宙监督假设并不否认它们是解，只是说它们并不代表真实的时空。一个解要能代表一个真实时空，至少要经得起微扰。以 Reissner-Nordström 解来说，它的奇点是局部裸的。但是可以证明，这个时空是经不起微扰的。微扰后，时空结构会发生严重的变化，其奇点将变成不是局部裸的。

不论是宇宙监督假设的强形式还是弱形式，至今都没有得到严格的证明，虽然许多人从许多角度对此做出过贡献。对这一假设的严格证明(或否定)已经成为经典广义相对论最重要的遗留问题之一。

四、时空的奇异边界

时空奇异性之所以难于定义、描述和讨论，是由于前面所指出的关键原因——时空的奇点不属于时空本身。为了克服这一困难，人们希望把所有奇点作为某种特殊的“边界点”有机地粘附于时空之上，用数学语言来说，就是希望定义一个新的集合 $\overline{M}$，它包括时空流形 M 的全部点及所有奇点，即

$$\overline{M}=M\cup\partial$$

其中 ∂ 表示所有奇点的集合，符号 $M\cup\partial$ 表示集合 M 与 ∂ 的“并”。$\overline{M}$ 至少应该是一个拓扑空间，当限制于 M 之内时，它的拓扑应还原为 M 本来的拓扑。这样，所有奇点的集合 ∂ 就可以看做 $\overline{M}$ 的某种边界，叫做时空的奇异边界。如果这种做法能够成功，就可以方便地指着 $\overline{M}$ 中的一点(实际是 ∂ 中的一点)说：“这是一个奇点”。同时，我们还可以谈及奇异边界的形状、位置甚至大小，谈及 $\overline{M}$ 的边界点(奇点)与内点(普通点)之间的关系等等。这种想法固然非常诱人，但提出一个完整的、严密的奇异边界构造方案却不是容易的。在六十年代，这一工作曾吸引过一些名家。Hawking 在1966年首先提出利用不完备测地线定义奇异边界的想法[11]。1968年，Geroch[12] 完成并发展了这一想法，提出了一整套用不完备测地线定义奇异边界的具体理论和方案，并把这样构造的奇异边界称为 g 边界 (g 是测地线 geodesic的简写)。文末给出了史瓦西时空及 Reissner-Nordström时空等6个奇异时空的例子，表明在每个例子中按他的定义计算出来的 g 边界都与人们的直观感觉(但以前无法定量表述)一致。1971年，Schmidt[13] 针对 g 边界方案的一些缺点，利用纤维丛的工具提出了数学上更为完美的 b 边界方

案（b 是纤维丛 fiber bundle 的简写)。然而，与 g 边界不同，利用这一定义计算一个奇异时空的 b 边界是非常麻烦的事，因此在 Schmidt 的文章中连一个例子也没有举出。1977 年，Johnson[14] 发表了出人意料的结果：他按 Schmidt 的定义计算了史瓦西时空的 b 边界，发现存在这样一个奇点，它的任意邻域竟都包含史瓦西时空的一切点！这在物理上是无法接受的，因此 b 边界的方案被迫放弃。1982年，Geroch、Liang(梁灿彬)及 Wald 发表合作文章[15]，指出 g 边界方案虽然对若干奇异时空给出了合理的结果，然而存在不止一个奇异时空的例子(文中只举出一个)，按文〔12〕的 g 边界定义必然得出物理上不能接受的病态拓扑。因此，很难认为 g边界在物理上是有用的。更有甚者，文中进一步指出，任何能够设想出来的奇异边界方案，只要满足两个不苛刻的条件，就一定遭到 g 边界的同样命运，即用于上述例子一定也会得出物理上不能接受的病态拓扑。文中证明了 b 边界和 g 边界一样满足这两个条件，因此即使不存在文〔14〕所指出的严重问题，b 边界也要放弃。实际上，这两个条件对于构造新的奇异边界的方案给出了苛刻的限制。然而，有一种奇异边界方案仍然可以逃脱这一限制而幸存（它不满足第二个条件），它的前身就是 Geroch、Kronheimer 和 Penrose 在1972年提出的“时空的理想点”的概念[16]。“理想点”不是时空本身的点，而是利用时空内部的因果关系自然地定义出的一些附加点。对于非奇异的时空，理想点可被看做无限远点。对于奇异时空，有些理想点代表无限远点，有些理想点则代表奇点（称为奇异理想点)，而所有奇异理想点的集合就构成时空的某种奇异边界。但是文〔16〕没有提出划分无限远理想点和奇异理想点的判据，因此不能认为文〔16〕提出了一种奇异边界的方案。从1974年起，Penrose 在几篇述评文章[7,8,9,10]中给出了这一判据，相当于给出了一种奇异边界的方案。这种奇异边界叫做因果边界(Causal-boundary，简称 c 边界)。虽然 c 边界不如 g 边界及 b 边界的表现力强，但因为它不受文〔15〕的否定，而且具有物理上直观(与时空的因果结构密切相关)、使用上方便等优点，因此应该被认为是目前较好的奇异边界方案。本文作者及其合作者最近的工作指出了这一边界方案可能遇到的一个困难，并正在对有关问题做进一步的探讨。

综上所述可知，在经典广义相对论的理论框架内，奇异性的存在是不可避免的。但是，由于奇异性往往伴随着曲率发散性，而当曲率半径小到可以与普朗克尺度(10^{-33}厘米)相比拟时必须考虑引力的量子效应，因此许多人正在致力于利用量子理论来避免奇异性的工作，并且已取得许多可喜的进展。这是当前相当活跃的一个研究课题。Hawking以及其他一些作者最近的工作表明(例如文〔17〕)，在量子引力论中，宇宙的初始奇异性(大爆炸奇点）可以避免(或改善)。当然，现在还没有一个完整、满意的量子引力论。因此，在完整的量子引力论中奇异性是否能够完全避免，也还是一个没有肯定答案的问题。无论如何，在经典引力论的框架内把有关奇异性的问题尽量探索清楚，对于研究量子引力论中的奇异性问题（包括避免奇异性的可能性)仍然是很有意义的。

参 考 文 献

〔1〕Geroch, R. P., *Ann. Phys.*, **48** (1968), 526.
〔2〕Hawking, S. W. and Ellis, G. F. R., The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge University Press, (1973).

[3] Penrose, R., *Phys. Rev. Lett.*, **14** (1965), 57.
[4] Hawking, S. W., *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A300** (1967), 187.
[5] Hawking, S. W., Ponrose, R., *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A314** (1970), 529.
[6] Penrose, R., *Rivista del Nuovo Cimento*, **1** (1969), 252.
[7] Penrose, R., in Gravitational Radiation and Gravitational Collapse, ed. by C. Dewitt-Morett, Reidel. Pub. Co., (1974).
[8] Penrose, R., in Confrontation of Cosmological Theories with Observational Data, ed. by M. S. Longair, Reidel Pub. Co., (1974).
[9] Penrose, R., in Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity, ed by N. R. Lebovitz, W. H. Reid and Vandervoort, P. O., University of Chicago Press, (1978).
[10] Penrose, R. in General Relativity, An Einstein Centenary Survey, ed. by S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press, (1979).
[11] Hawking, S. W., Singularities and the Geometry of Space-time, (1966), 是申请 Adams 奖的论文，未发表.
[12] Geroch, R. P., *J. Math. Phys.* **9** (1968), 450.
[13] Schmidt, B. G., *Gen. Rel. and Gravitation*, **1** (1971), 269.
[14] Johnson, R. A., *J. Math. Phys.* **18** (1977), 898.
[15] Geroch, R. P., Liang Canbin (梁灿彬) and Wald, R. M., *J. Math. Phys.* **23** (1982), 432.
[16] Geroch, R. P., Kronheimer, E. H. and Penrose, R., *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A327** (1972), 545.
[17] Hartle, J. B. and Hawking, S. W., *Phys. Rev.* **D28** (1983), 2960.

（责任编辑　谢应纯）

Singularities of Space-time

Liang Canbin
(Department of Physics, Beijing Normal University)

Abstract

In spite of the fact that large classes of solutions of Einstein equations had been well known to be singular for many years, two basic questions remained unanswered until 1965: (1) Was there an initial singularity in our universe? (2) Is there a final singularity in the collapsing process of a star with large enough mass? Before 1965, many physicist as well as astronomers attributed the existence of singularities to the exact symmetries of the solutions. Since no exact symmetry exists in any physical situation, they then suggested that no singularity occur in a realistic space-time. However, the singularity theorems proven by Penrose and Hawking in 1965—1970 assert that singularities do exist provided that some reasonable conditions are satisfied (no symmetry is needed in these conditions), thus giving an affirmative answer to the two above-mentioned long standing questions.

The first part of this paper is concerned with the definition of spacetime singularities. The difficulties involved in formulating an exact definition are exposed in detail

and the definition based on geodesic incompleteness introduced. The second and third parts give respectively reviews of the singularity theorems and the "Cosmic censorship hypothesis", the latter being one of the most important unsolved problems of classical general relativity. The last part of the paper is devoted to the introduction of the idea and difficulties of constructing a "singular boundary" attached to a singular space-time.