

Content(5)

➤ 卫星大地测量基础



中科院
上海天文台





线性代数，矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 & 1+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 8 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$





线性代数，矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} \sum_{i,1=n} a_{1i} \times b_{i1} & \sum_{i,1=n} a_{1i} \times b_{i2} & \cdots & \sum_{i,1=n} a_{1i} \times b_{in} \\ \sum_{i,1=n} a_{2i} \times b_{i1} & \sum_{i,1=n} a_{2i} \times b_{i2} & \cdots & \sum_{i,1=n} a_{2i} \times b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i,1=n} a_{ni} \times b_{i1} & \sum_{i,1=n} a_{ni} \times b_{i2} & \cdots & \sum_{i,1=n} a_{ni} \times b_{in} \end{pmatrix}$$



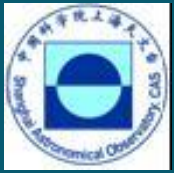


线性代数，矩阵

中科院上海天文台

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$





测量平差

➤ 测量误差来源

- 1 仪器误差
- 2 环境误差
- 3 人员误差

➤ 测量误差分类

- 1 粗差
- 2 系统误差
- 3 偶然误差





偶然误差分布

就单个偶然误差而言，其数值在大小和符号上均是偶然的、随机的、无规律的，但就大量偶然误差而言，具有一定的统计规律：

1. 有限性：在有限次观测中，偶然误差应小于限值。
2. 渐降性：误差小的出现的概率大
3. 对称性：绝对值相等的正负误差概率相等
4. 抵偿性：当观测次数无限增大时，偶然误差的平均数趋近于零。

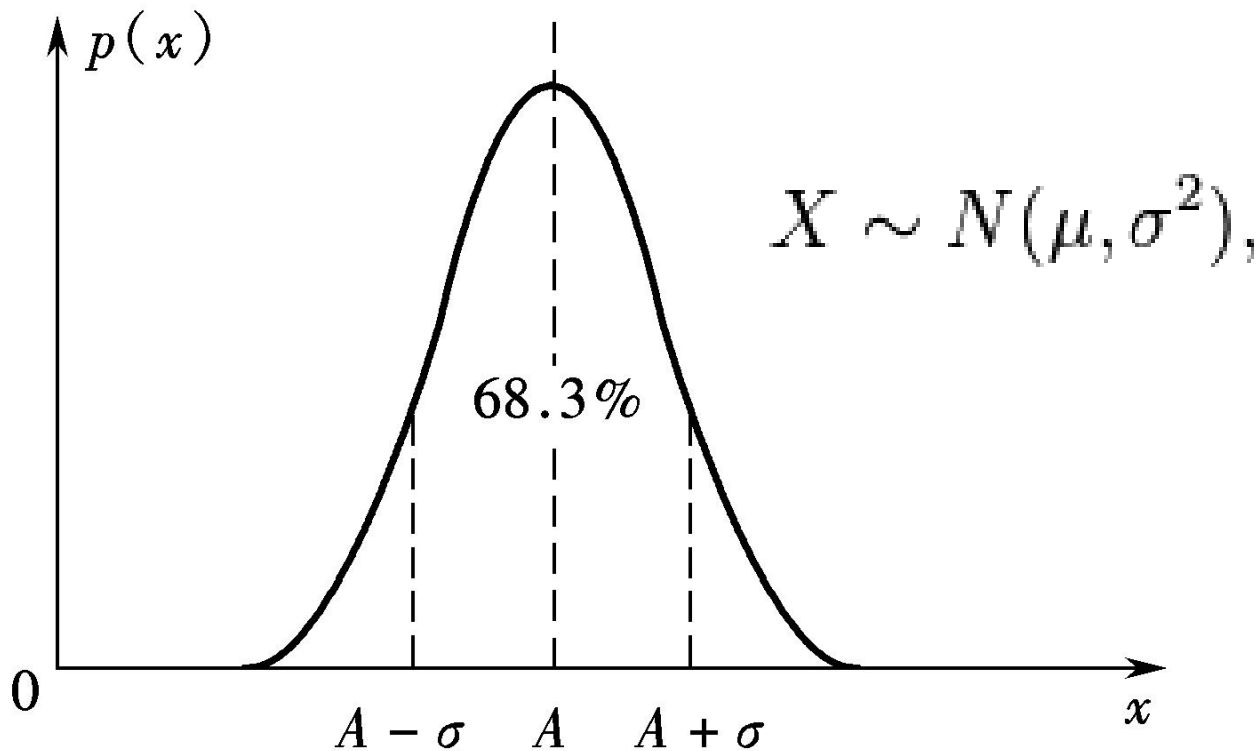
测量平差实际上就是处理偶然误差，一是通过观测数据求待定量的最佳估值，二是评定成果质量。





偶然误差分布（高斯正态分布）

中科院上海天文台



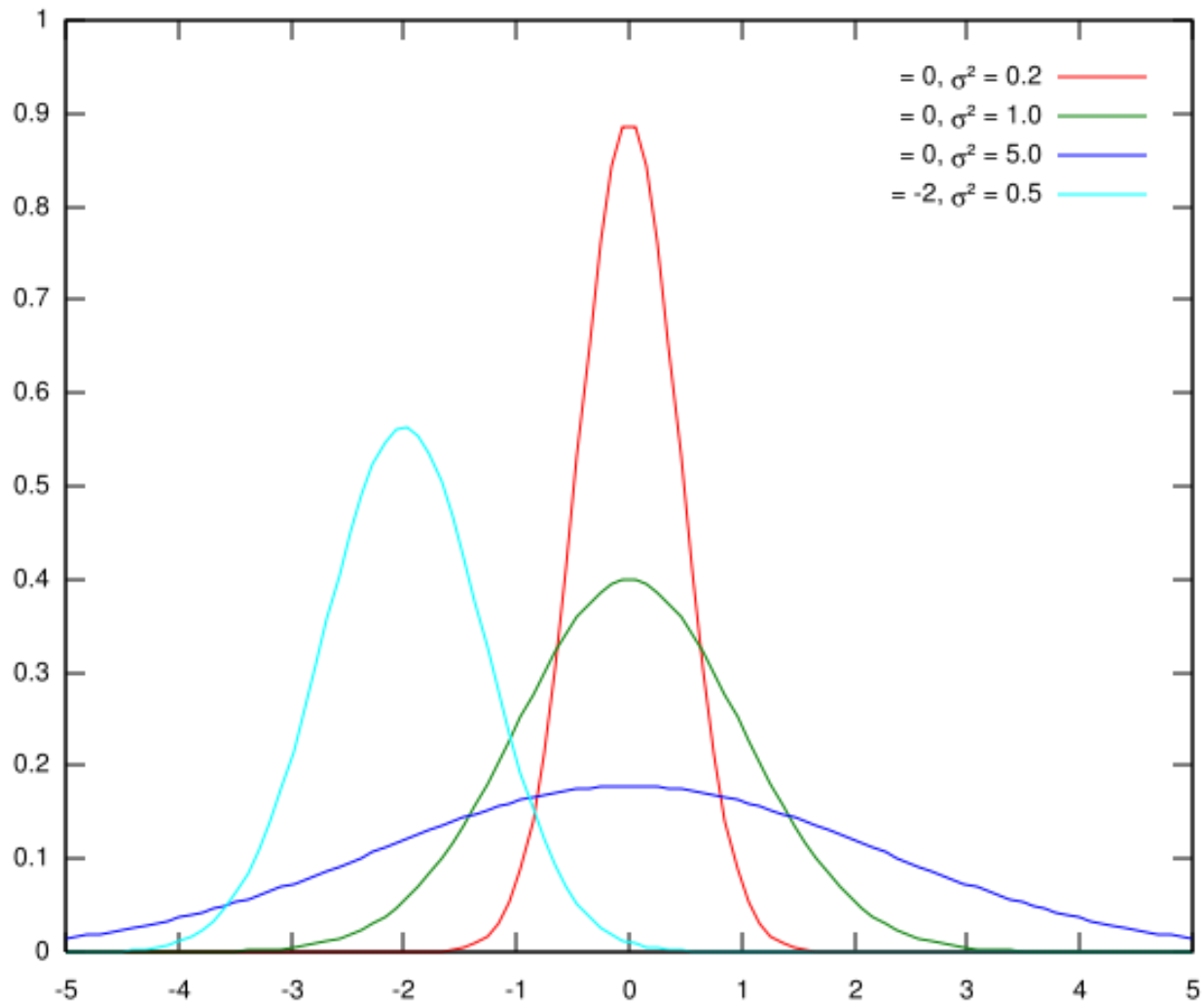
中误差

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{X} - l_i)^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n V_i V_i}{n-1}}$$





偶然误差分布（高斯正态分布）



$$X \sim N(\mu, \sigma^2),$$





偶然误差分布（高斯正态分布）

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\Delta) d\Delta = 1$$

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} f(\Delta) d\Delta = 68.3\%$$

$$\int_{-2\sigma}^{2\sigma} f(\Delta) d\Delta = 95.5\%$$

$$\int_{-3\sigma}^{3\sigma} f(\Delta) d\Delta = 99.7\%$$





最小二乘平差

► 举例：直线拟合
任意两个点都可以确定一个线性函数

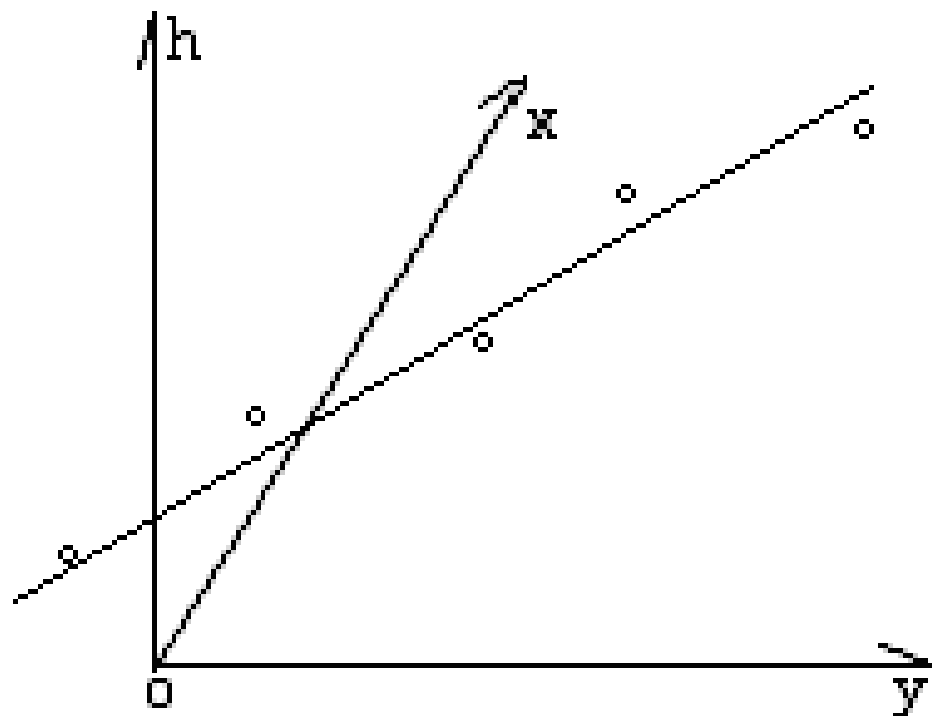
准则：

$$\sum_1^n |v_i| = \min$$

$$\sum_1^n v_i^2 = \min$$

更优准则：

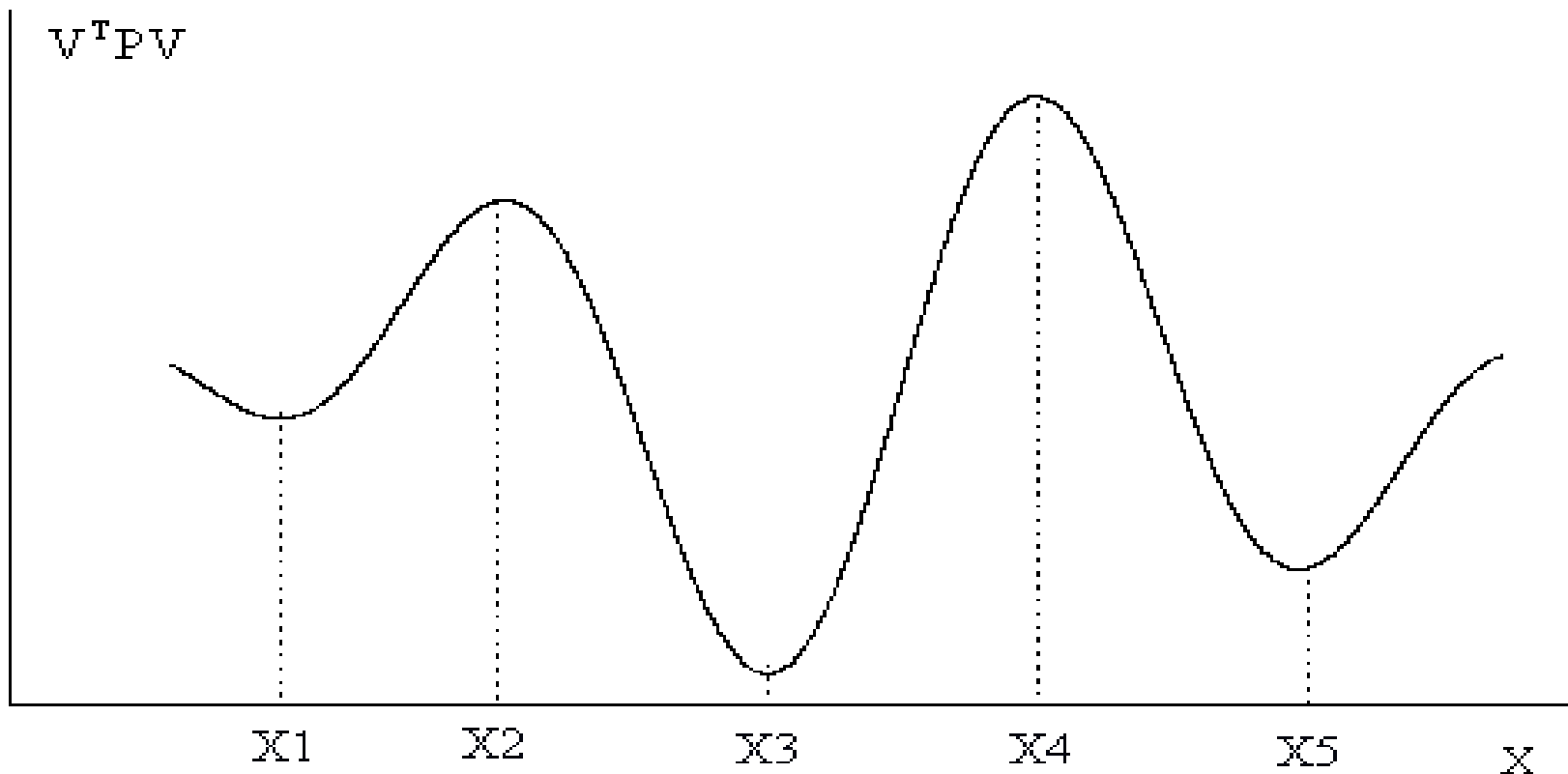
$$\sum_1^n p_i v_i^2 = \min$$





最小二乘平差

中科院上海天文台



更优准则:

$$\sum_{i=1}^n P_i v_i^2 = \min$$





最小二乘流程

➤ 观测量与未知数之间的关系

$$\rho_i + v_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

➤ 泰勒展开

$$v_i = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right|_{X^0} \delta x_1 + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \right|_{X^0} \delta x_2 + \dots + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right|_{X^0} \delta x_n - l_i$$

➤ 多个观测值

$$V = A\delta X - L$$





最小二乘流程

➤ 泰勒展开

$$v_i = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right|_{X^0} \delta x_1 + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \right|_{X^0} \delta x_2 + \dots + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right|_{X^0} \delta x_n - l_i$$

➤ 多个观测值

$$V = A \delta X - L$$

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{X^0} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{X^0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{X^0} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{X^0} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{X^0} & \dots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_{X^0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \right|_{X^0} & \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \right|_{X^0} & \dots & \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \right|_{X^0} \end{pmatrix} \quad \delta X = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \dots \\ \delta x_n \end{pmatrix}$$



最小二乘流程

➤ 泰勒展开

$$v_i = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right|_{X^0} \delta x_1 + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \right|_{X^0} \delta x_2 + \dots + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right|_{X^0} \delta x_n - l_i$$

➤ 多个观测值

$$V = A \delta X - L$$

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{X^0} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{X^0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{X^0} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{X^0} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{X^0} & \dots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_{X^0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \right|_{X^0} & \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \right|_{X^0} & \dots & \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \right|_{X^0} \end{pmatrix} \quad \delta X = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \dots \\ \delta x_n \end{pmatrix}$$



最小二乘流程

➤平方和最小

$$\sum_1^n p_i v_i^2 = \min$$

➤偏导数

$$\frac{\partial(V^T P V)}{\partial \delta X} = 0$$

➤法方程

$$A^T P A \delta X = A^T P L \quad N \delta X = C$$

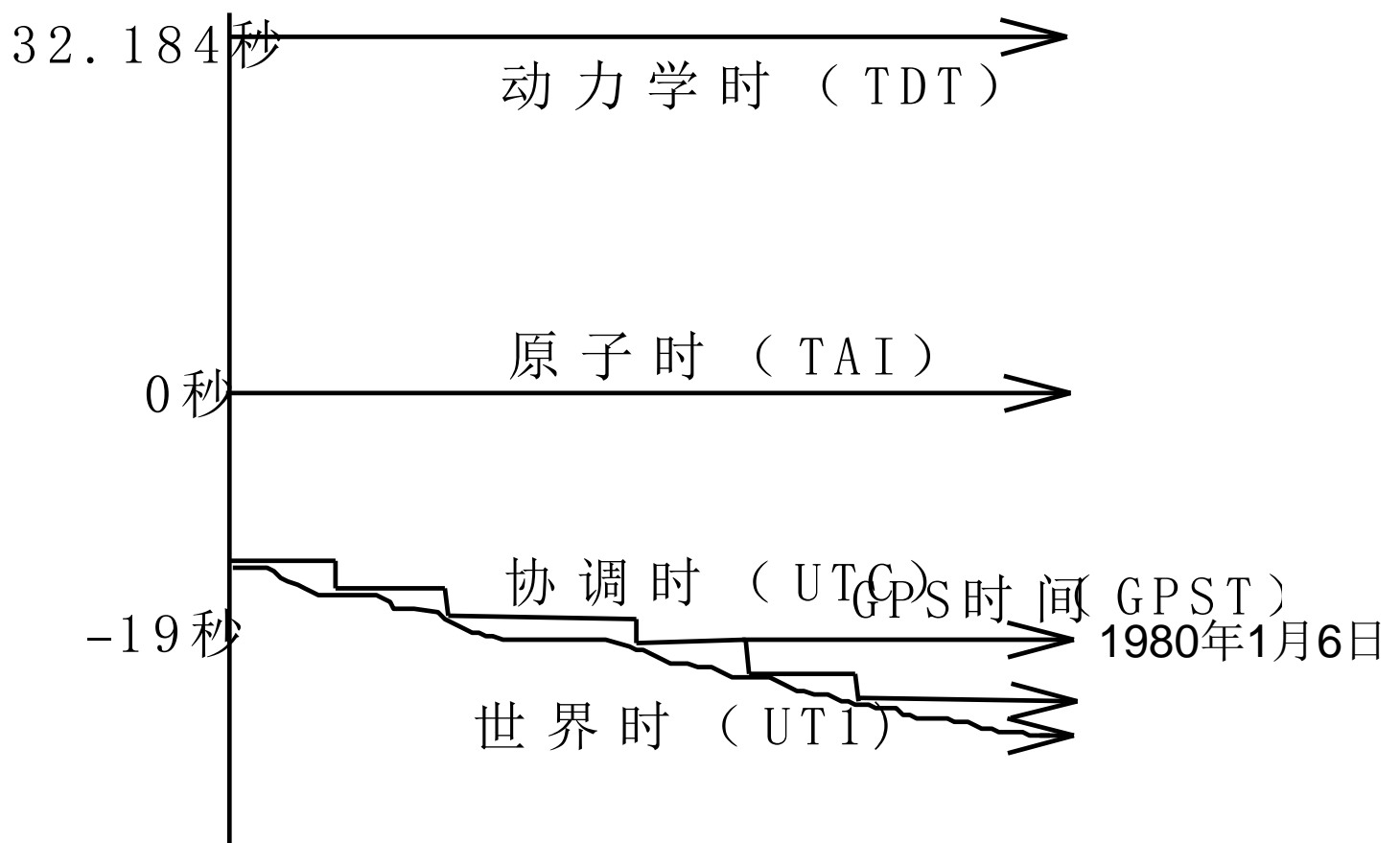
➤参数解算

$$\delta X = N^{-1} C$$





时间系统



BDT: -33秒; 2006年1月1日





时间系统

GPS 的时间基准为GPST，其在1980年1月6日零时被设置成与UTC 完全一致，GPST 与世界原子时TAI 之差是一个常数(19 秒)，不受跳秒的影响；GPST 的实现以及维持是基于地面原子钟组与星钟组合而成的纸面钟。

GLONASS 的时间基准为GLONASSST，其以中央同步器时间为基础产生，存在与UTC 一样的跳秒。

Galileo 的时间基准为GST，其基准与GPST 一致，与TAI 差19 秒，没有跳秒，并且通过两套精密时统设施(PTF, Precise Timing Facilities)的钟组进行时间的维持。

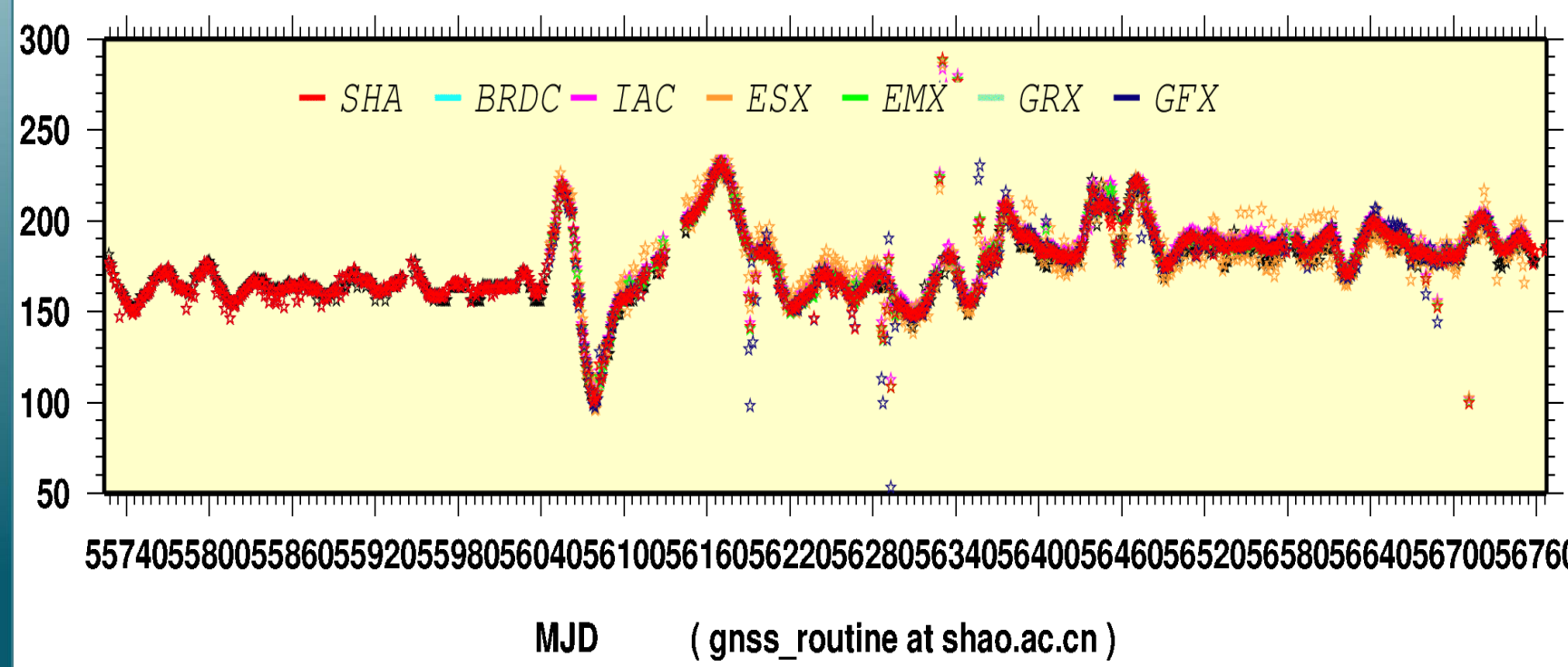
北斗的时间基准为BDT，由北斗主控站的原子钟组定义，其在2006年1月1日零时被设置成与UTC 完全一致，其后不受跳秒的影响，BDT 与TAI之差为常数33 秒。





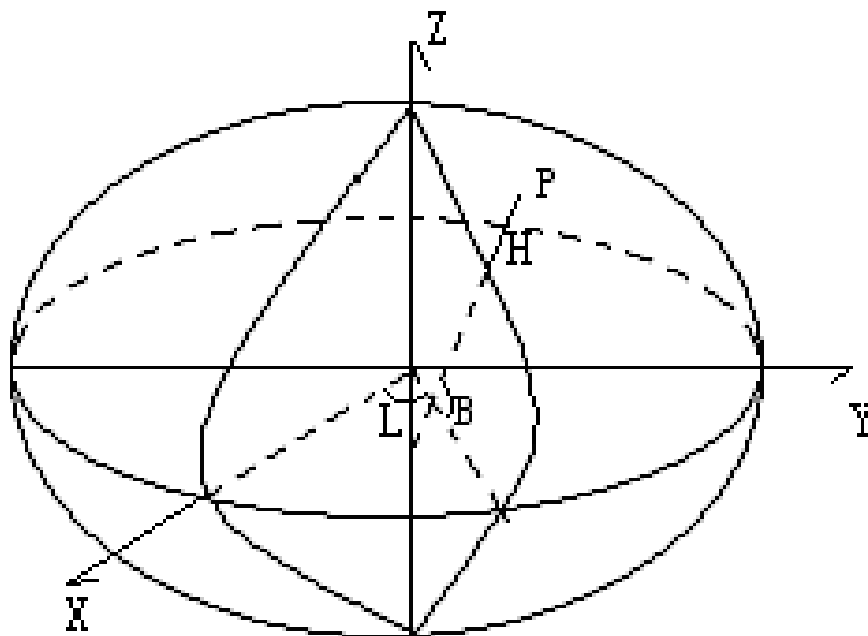
时间系统

SHA Results compared to IGS ACs'





坐标系-大地坐标系



大地坐标系

大地纬度：经过该点的地球椭球法线与赤道面的交角。

大地经度：经过该点的子午面与格林尼治子午面之间的交角，向东为东经。

大地高：点至地球椭球面的垂直距离。





坐标系-空间直角坐标系

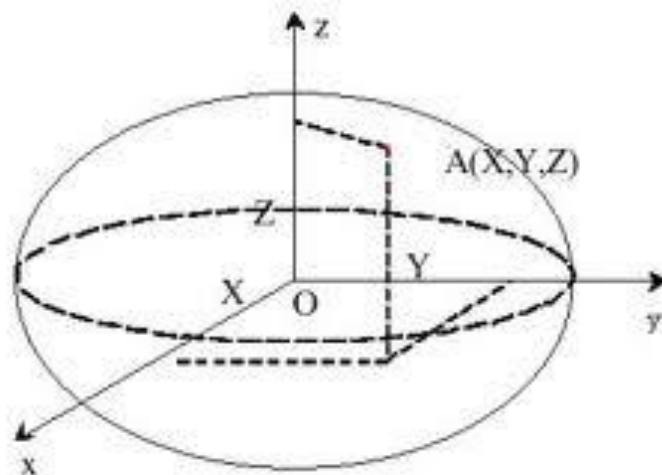


图 2-3 空间直角坐标系

空间直角坐标系

原点：地心。

X轴：地心至赤道面和格林尼治子午线交点方向。

Y轴：处在赤道面内，与X轴和Z轴组成右手系。

Z轴：地心至北极方向。





坐标系-坐标转化

中科院上海天文台

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + H) \cos(B) \cos(L) \\ (N + H) \cos(B) \sin(L) \\ (N(1 - e^2) + H) \sin(B) \end{pmatrix}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(B)}}$$

大地坐标系 \Rightarrow 空间直角坐标系





坐标系-坐标转化

$$\operatorname{tg}(L) = \frac{Y}{X}$$

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = (N + H)\cos(B)$$

$$\operatorname{tg}(B) = \frac{Z + Ne^2 \sin(B)}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{(N + H)\cos(B)}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

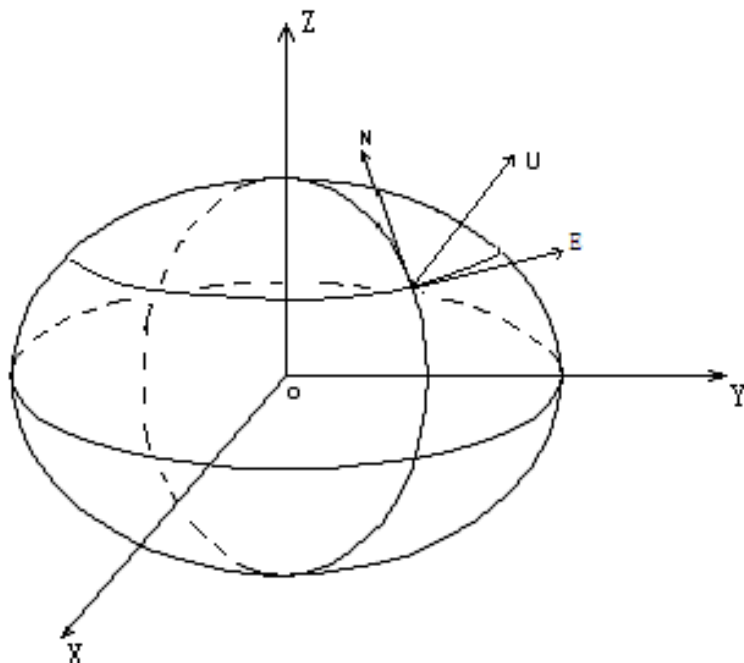
空间直角坐标系 \Rightarrow 大地坐标系





坐标系-切面坐标系

中科院上海天文台



站心当地切面坐标系

原点：测站或测站在地球椭球上的投影点。

N轴：原点向北，处在过原点的子午面内，与子午线相切。

E轴：原点向东，与过原点的纬度圈相切。

U轴：原点向上，与地球椭球法线一致。

三轴正交。





坐标系-坐标转化

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = R_3(-L)R_2(B) \begin{pmatrix} U \\ E \\ N \end{pmatrix}$$

$$R_3(-L) = \begin{pmatrix} \cos(L) & -\sin(L) & 0 \\ \sin(L) & \cos(L) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2(B) = \begin{pmatrix} \cos(B) & 0 & -\sin(B) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(B) & 0 & \cos(B) \end{pmatrix}$$

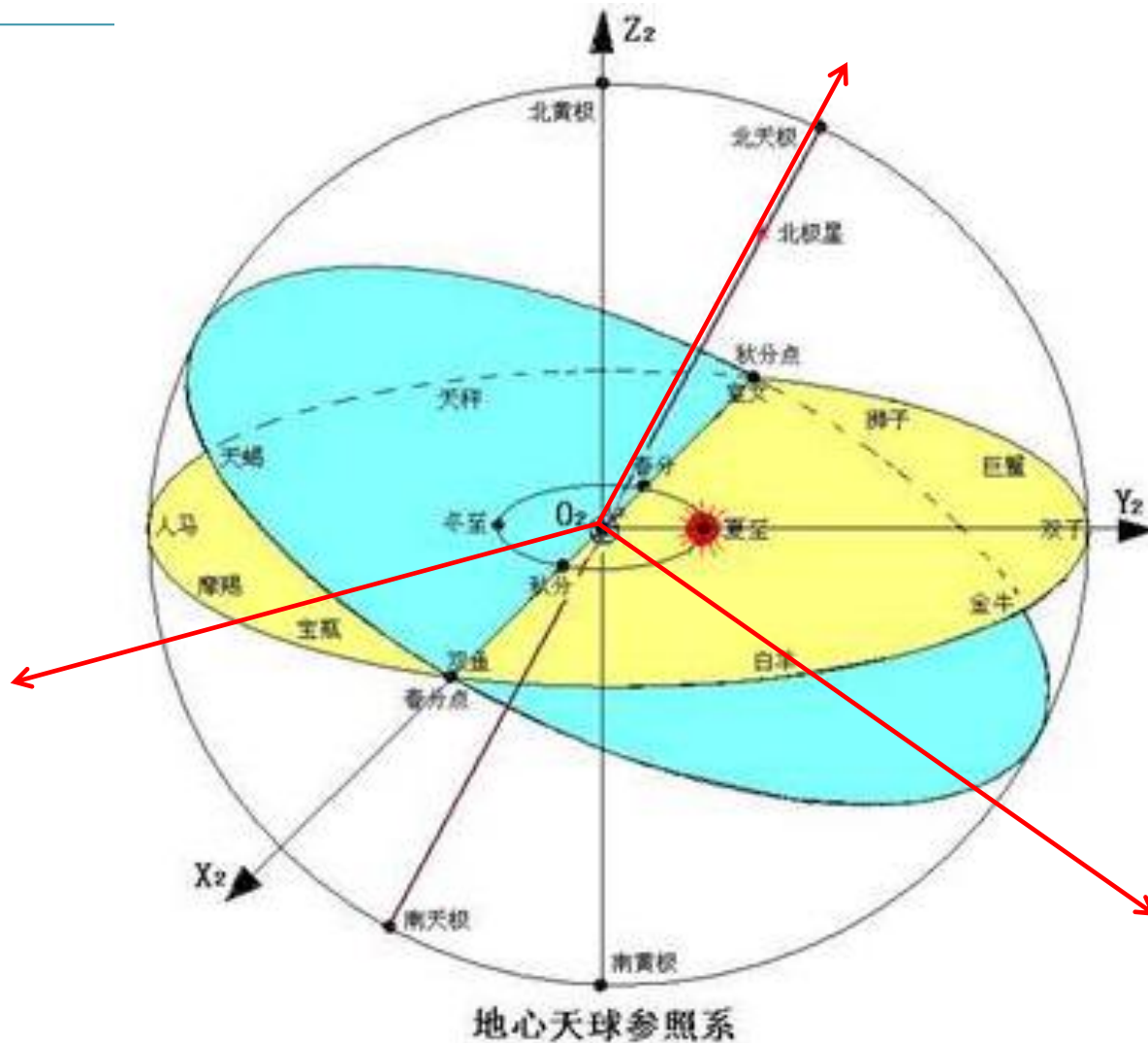
站心当地切面坐标系=>空间直角坐标系





坐标系-坐标转换, ITRFx

中科院上海天文台

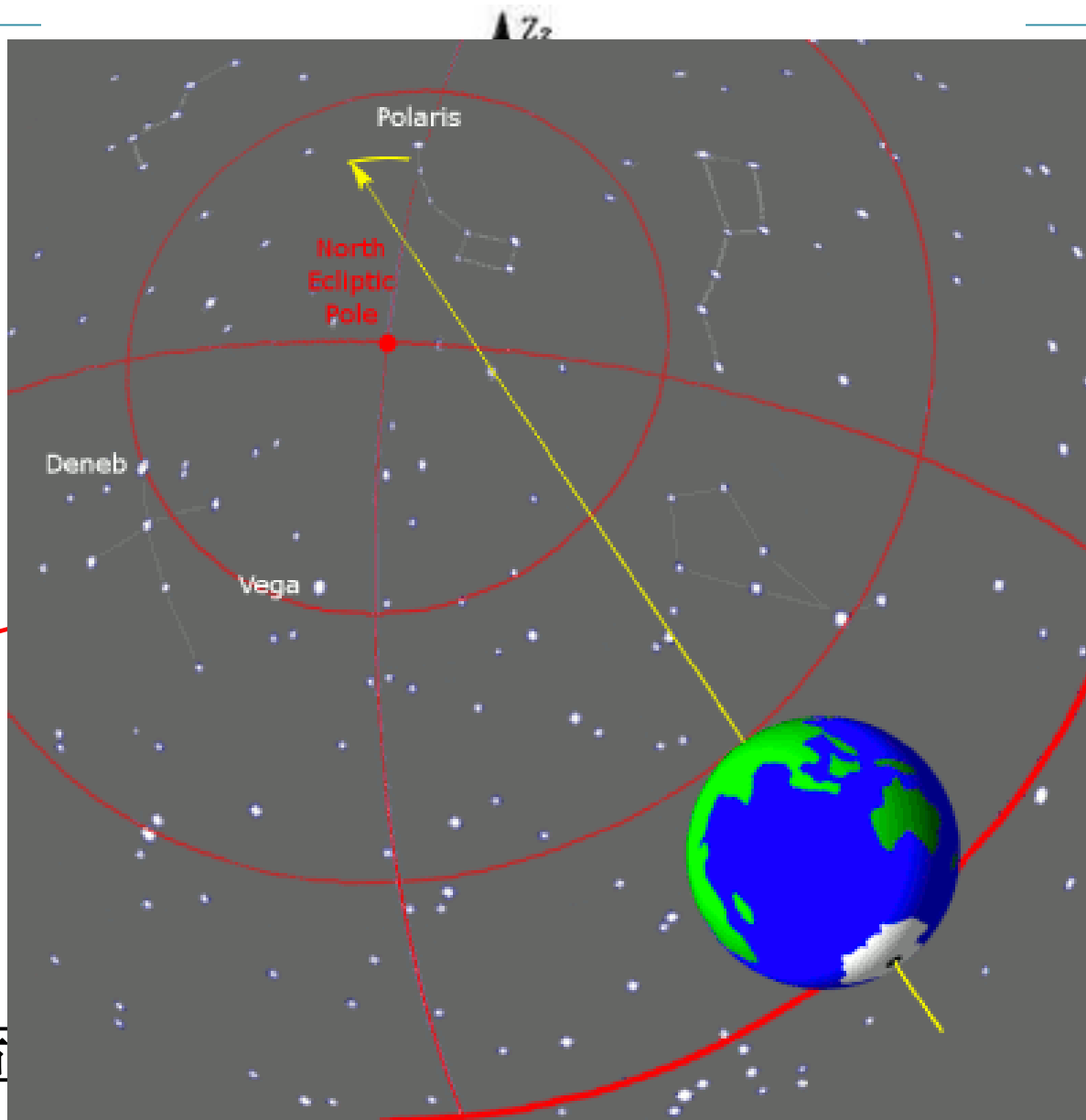


地固空间直角坐标系=>惯性空间直角坐标系





坐标系-坐标转换



地固

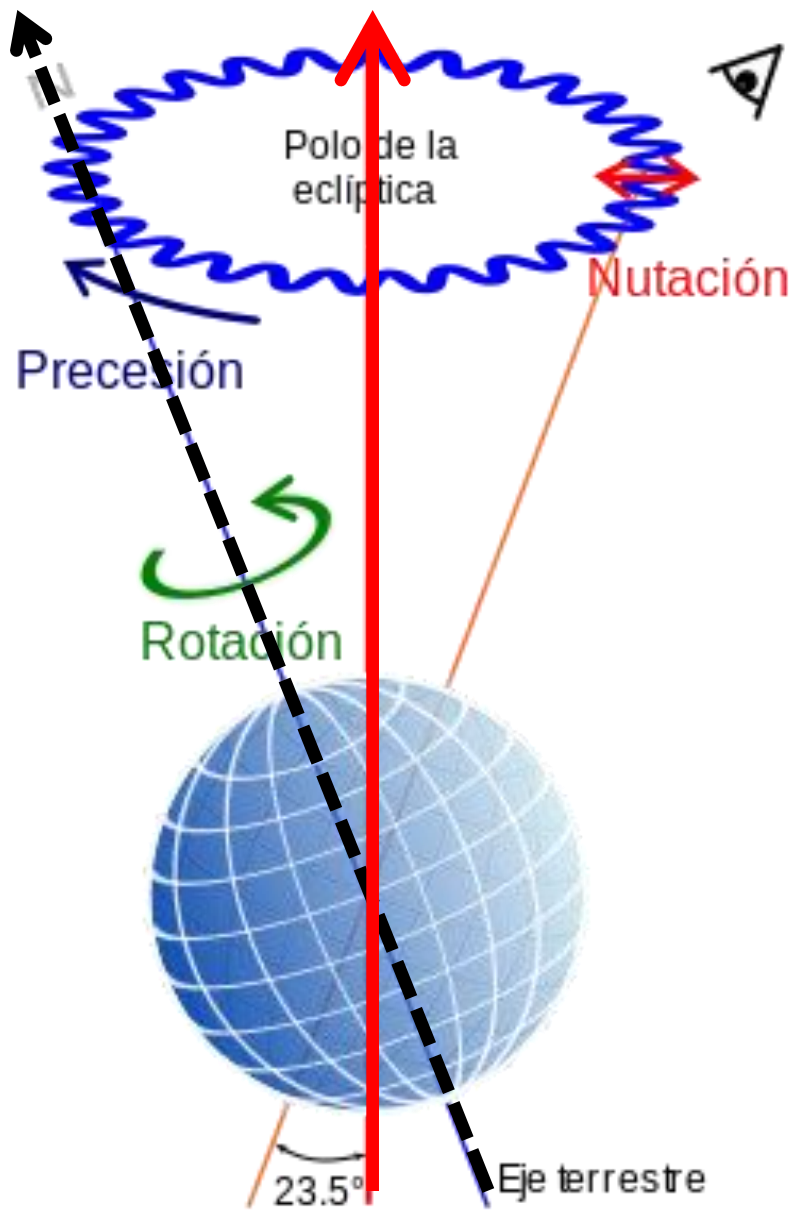
系

中科院上海天文台





坐标系-坐标转换





坐标系统-坐标转换

$$[CRS] = Q(t)R(t)W(t)[TRS]$$

岁差-章动、自转、极移

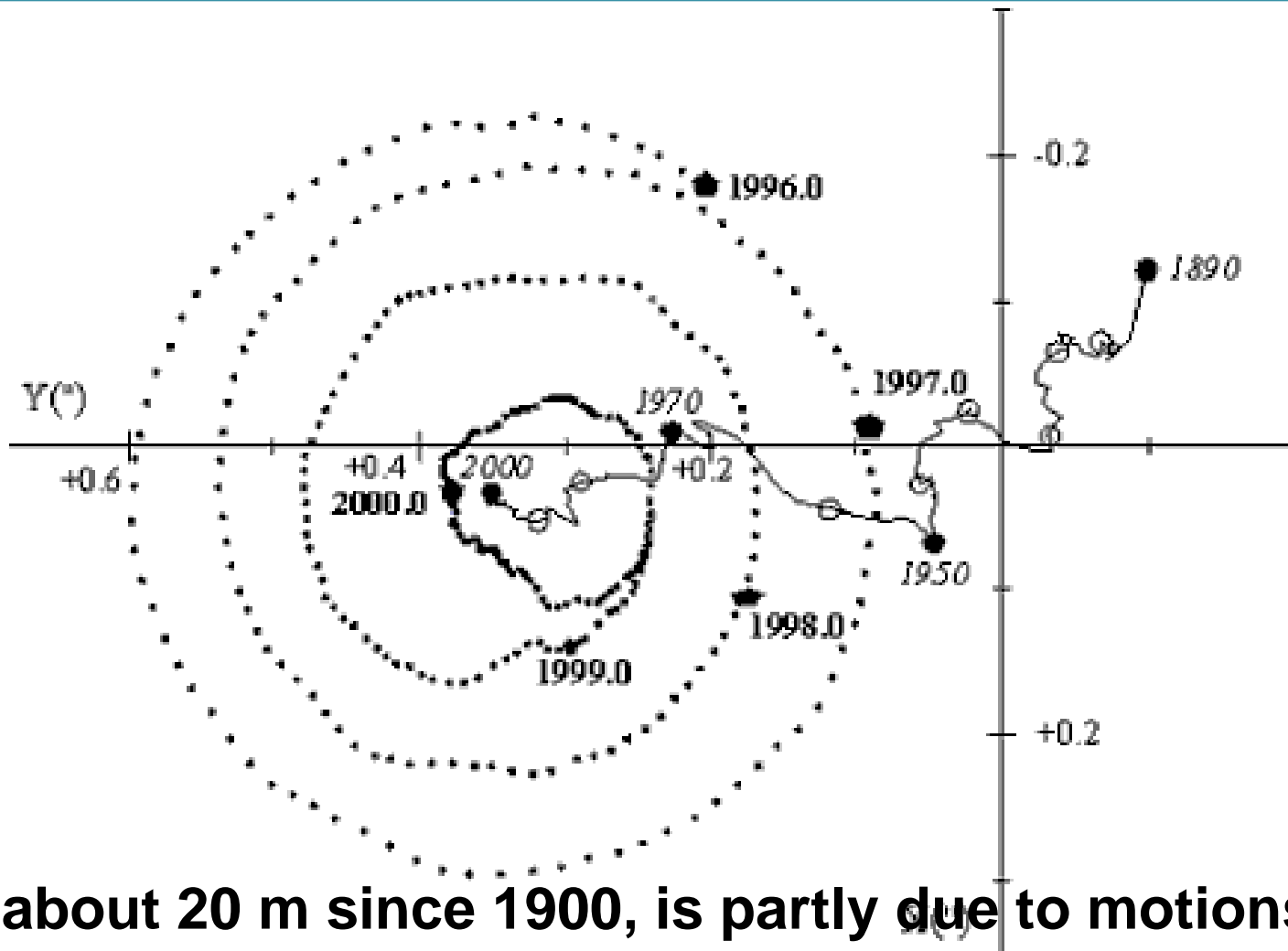
地固空间直角坐标系=>惯性空间直角坐标系





Polar motion : 极移

中科院上海天文台



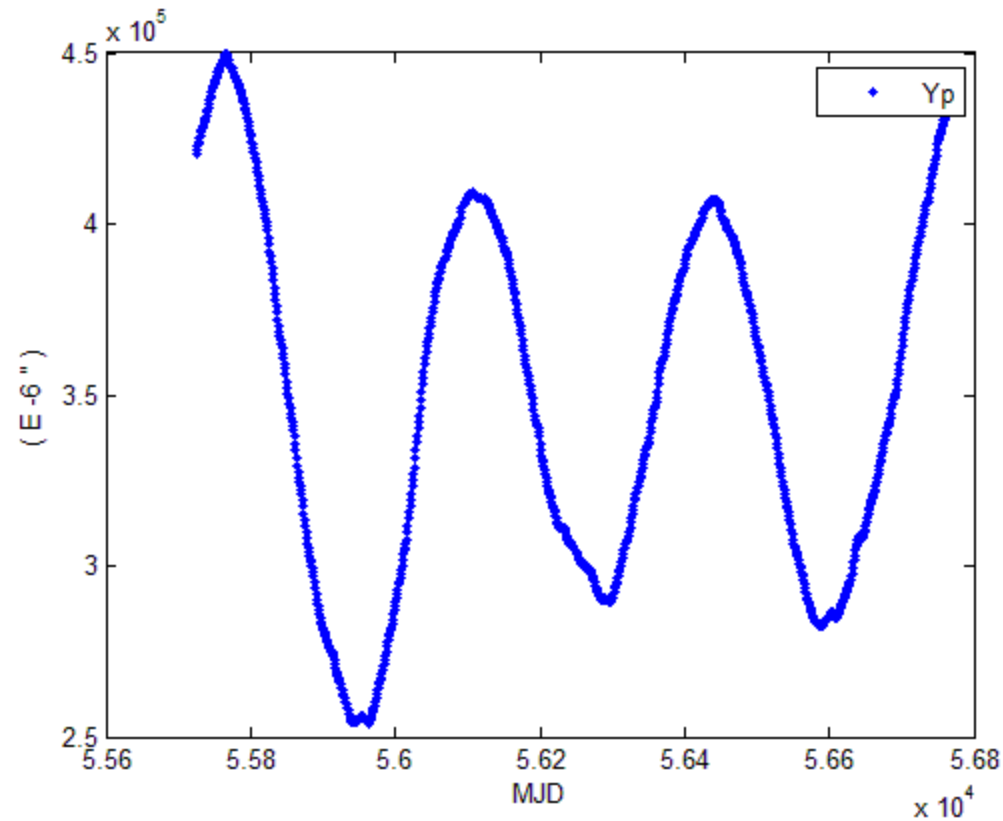
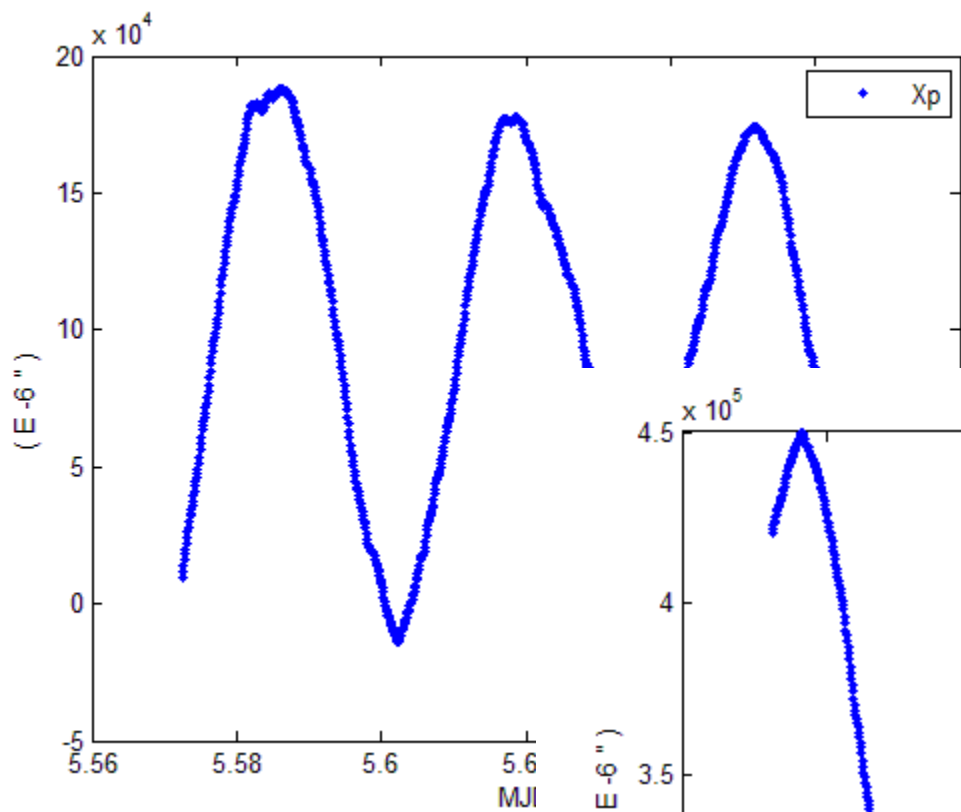
about 20 m since 1900, is partly due to motions in the Earth's core and mantle, and partly to the redistribution of water mass





Polar motion : 极移

中科院上海天文台





Polar motion : 极移

$$W(t) = R_3(-s') \cdot R_2(x_p) \cdot R_1(y_p)$$

范围<0.6''

$$R_3(-L) = \begin{pmatrix} \cos(L) & -\sin(L) & 0 \\ \sin(L) & \cos(L) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2(B) = \begin{pmatrix} \cos(B) & 0 & -\sin(B) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(B) & 0 & \cos(B) \end{pmatrix}$$



自转

$$R(t) = R_3(-\theta)$$

where $T_u = (\text{Julian UT1 date} - 2451545.0)$, and $UT1 = UTC + (UT1 - UTC)$,
or equivalently

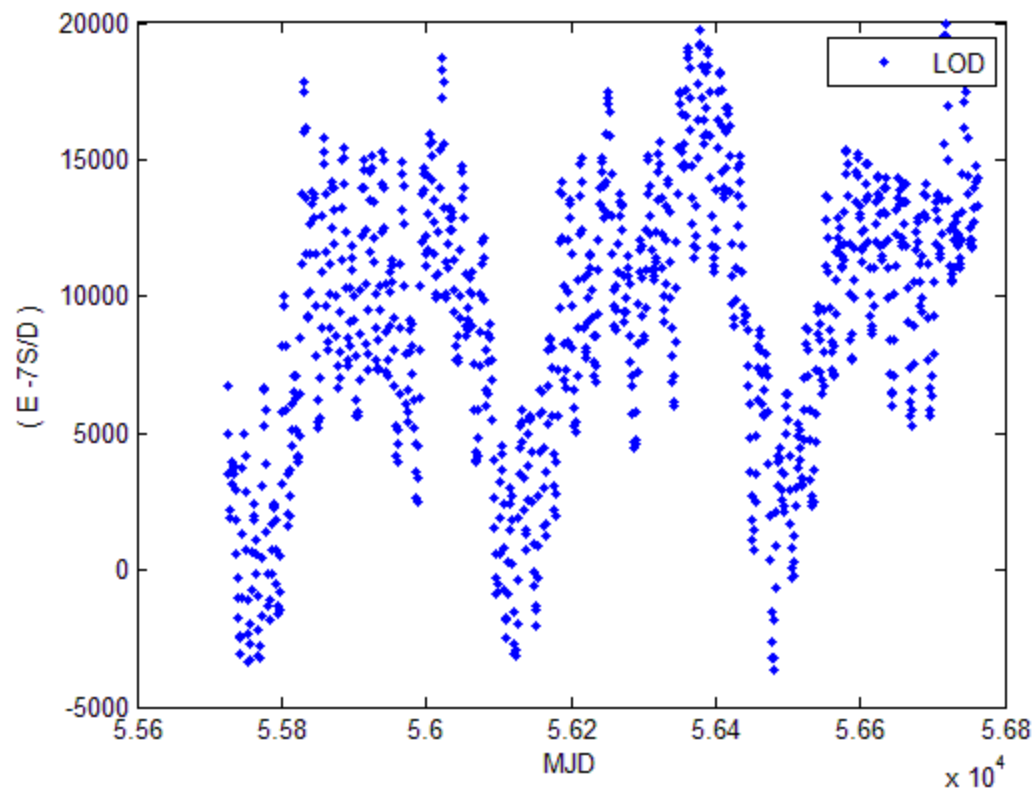
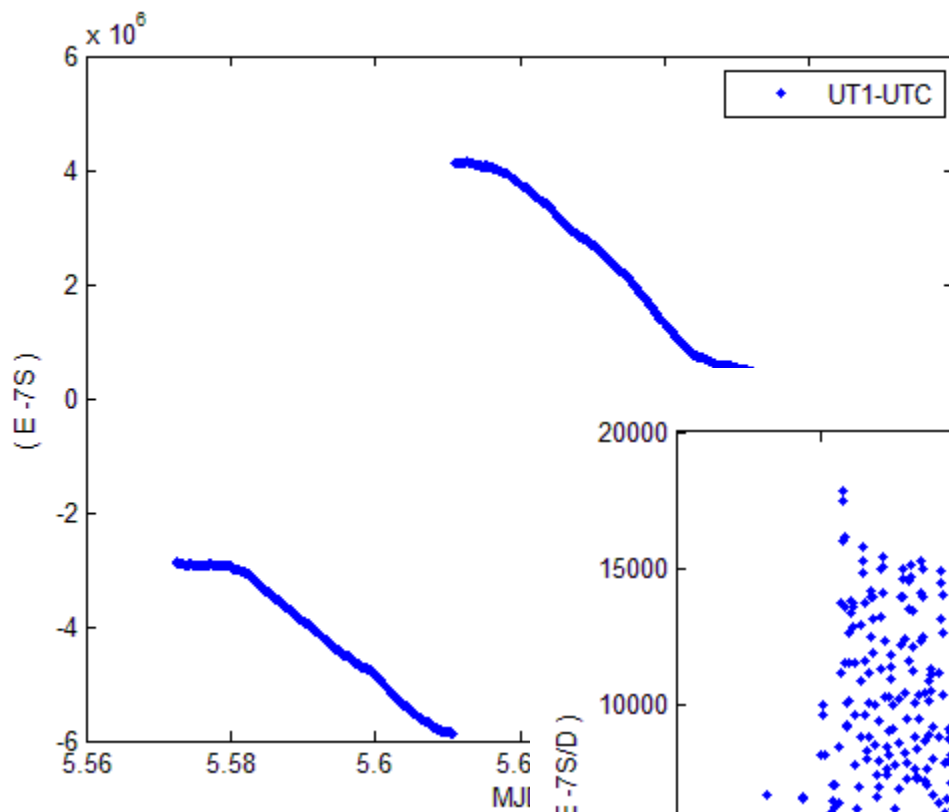
$$\theta(T_u) = 2\pi(\text{UT1 Julian day number elapsed since } 2451545.0 + 0.7790572732640 + 0.00273781191135448T_u), \quad (14)$$





Polar motion : 自转

中科院上海天文台



章动

$$Q_2(t) = R_X(-\varepsilon_A)R_Z(\Delta\psi)R_X(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon)$$

$$\varepsilon_A = \varepsilon_0 - 46.84024''t - 0.00059''t^2 + 0.001813''t^3$$

$$\varepsilon_0 = 84381.44800''$$

$$\begin{cases} \Delta\psi = \sum_{i=1}^{106} \left[(A_i + A_i t) \sin \left(\sum_{j=1}^5 K_{ji} \alpha_j(t) \right) \right] \\ \Delta\varepsilon = \sum_{i=1}^{106} \left[(B_i + B_i t) \cos \left(\sum_{j=1}^5 K_{ji} \alpha_j(t) \right) \right] \end{cases}$$



岁差

$$Q_1(t) = R_Z(\zeta_A)R_Y(-\theta_A)R_Z(Z_A)$$

$$\zeta_A = 2.5976176'' + 2306.0809506''t + 0.3019015''t^2 + 0.0179663''t^3 \\ - 0.0000327''t^4 - 0.0000002''t^5,$$

$$\theta_A = 2004.1917476''t - 0.4269353''t^2 - 0.0418251''t^3 \\ - 0.0000601''t^4 - 0.0000001''t^5,$$

$$z_A = -2.5976176'' + 2306.0803226''t + 1.0947790''t^2 + 0.0182273''t^3 \\ + 0.0000470''t^4 - 0.0000003''t^5.$$



Content(6)

► 精密定轨定位观测值



中科院
上海天文台

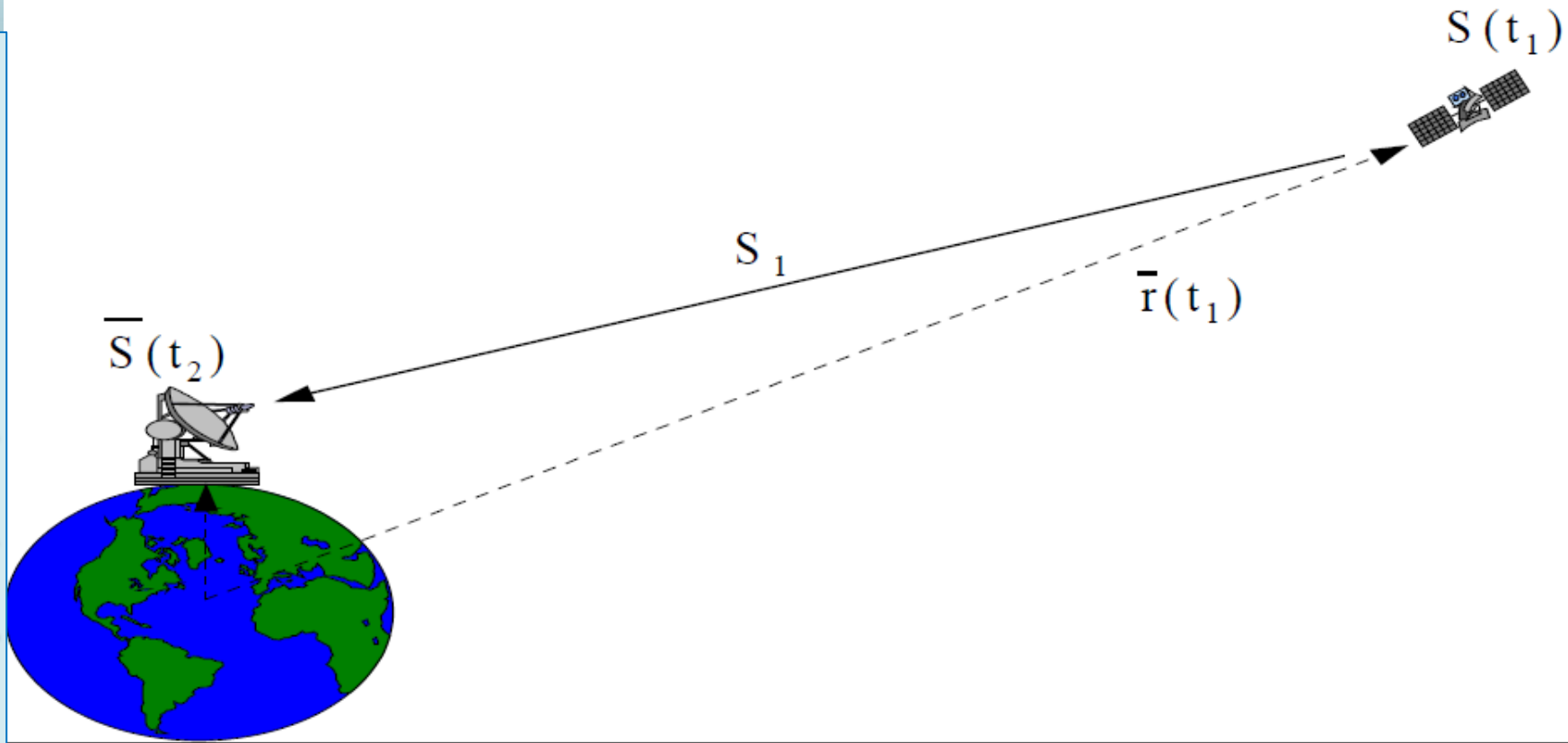




Content(6)

GNSS Observation

中科院上海天文台



$$P_m^j = \rho^j + c\delta - c\delta^j + f(\alpha) \cdot ZTD + \frac{1}{f_m^2} \cdot I^j + \Delta P_m^j$$

$$\rho^j = f(x_{sta}, x_{sat})$$





GPS的基本观测量

1. 导航星历
2. 伪距观测量
3. 相位观测量
4. 多普勒观测量
5. 观测方程的线性组合
6. 载波相位线性组合的因子和误差
7. 码光滑伪距



开普勒轨道根数

中科院上海天文台

轨道长半轴: a

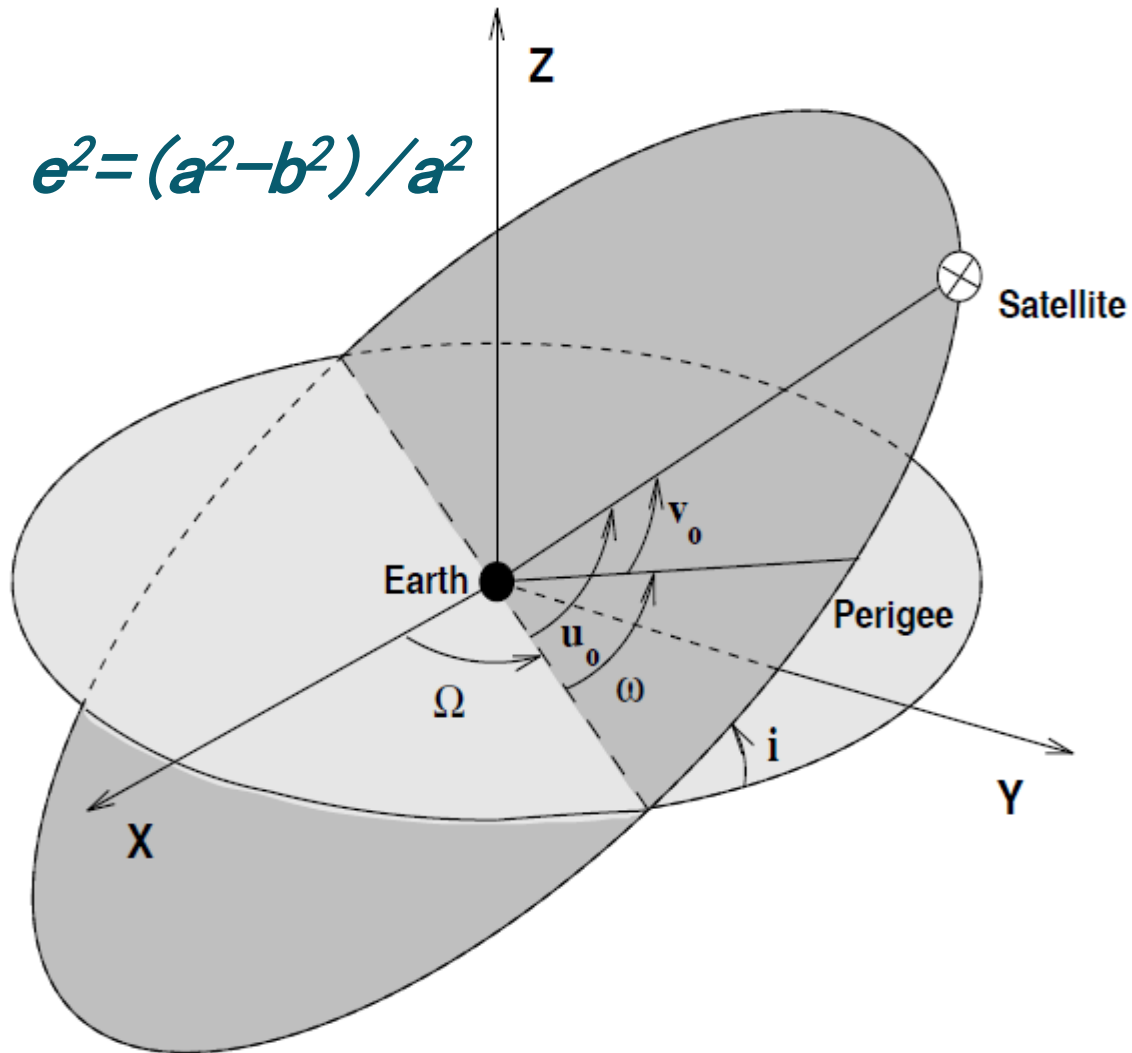
轨道偏心率: e -- $e^2 = (a^2 - b^2) / a^2$

升交点赤径: Ω

轨道倾角: i

近地点角距: ω

真近点角: ν





广播星历轨道信息

中科院上海天文台



| 2 | NAVIGATION DATA | | | | RINEX VERSION / TYPE | | | |
|------------------------------|--------------------|-------------|-------------|----------------------|----------------------|-------------------------|---------------------|---------------------|
| CCRINEXN V1.6.0 UX CDDIS | | | | | PGM / RUN BY / DATE | | | |
| IGS BROADCAST EPHEMERIS FILE | | | | | COMMENT | | | |
| 0.6519E-08 | 0.1490E-07 | -0.5960E-07 | -0.1192E-06 | | | | | ION ALPHA |
| 0.7782E+05 | 0.3277E+05 | -0.6554E+05 | -0.1966E+06 | | | | | ION BETA |
| 0.372529029846E-08 | 0.124344978758E-13 | 319488 | 1547 | DELTA-UTC: A0,A1,T,W | | | | LEAP SECONDS |
| 15 | | | | | END OF HEADER | | | |
| 01 | 9 | 9 | 1 | 0 | 0 | 0.0-0.574146397412D-04 | 0.454747350886D-12 | 0.000000000000D+00 |
| | | | | | | 0.980000000000D+02 | -0.952187500000D+02 | 0.573809615759D-08 |
| | | | | | | -0.499933958054D-05 | 0.374773610383D-02 | 0.669993460178D-05 |
| | | | | | | 0.172800000000D+06 | 0.931322574616D-08 | 0.203231087891D+01 |
| | | | | | | 0.961712611053D+00 | 0.256125000000D+03 | 0.966371784235D+00 |
| | | | | | | -0.585738684082D-10 | 0.100000000000D+01 | 0.154700000000D+04 |
| | | | | | | 0.200000000000D+01 | 0.000000000000D+00 | -0.130385160446D-07 |
| | | | | | | 0.000000000000D+00 | 0.000000000000D+00 | 0.000000000000D+00 |
| 01 | 9 | 9 | 1 | 2 | 0 | 0.0-0.574113801122D-04 | 0.454747350886D-12 | 0.000000000000D+00 |
| | | | | | | 0.990000000000D+02 | -0.100468750000D+03 | 0.565702135193D-08 |
| | | | | | | -0.541843473911D-05 | 0.374710559845D-02 | 0.628456473351D-05 |
| | | | | | | 0.180000000000D+06 | -0.558793544769D-07 | 0.203225295467D+01 |
| | | | | | | 0.961711920556D+00 | 0.258312500000D+03 | 0.966376881042D+00 |
| | | | | | | -0.155006456641D-09 | 0.100000000000D+01 | 0.154700000000D+04 |
| | | | | | | 0.240000000000D+01 | 0.630000000000D+02 | -0.130385160446D-07 |
| | | | | | | 0.000000000000D+00 | 0.000000000000D+00 | 0.000000000000D+00 |
| 01 | 9 | 9 | 1 | 3 | 59 | 44.0-0.574076548219D-04 | 0.454747350886D-12 | 0.000000000000D+00 |
| | | | | | | 0.440000000000D+02 | -0.115906250000D+03 | 0.553380193363D-08 |
| | | | | | | -0.596418976784D-05 | 0.374759978149D-02 | 0.636652112007D-05 |
| | | | | | | 0.187184000000D+06 | -0.931322574616D-08 | 0.203219475833D+01 |
| | | | | | | 0.961710723889D+00 | 0.256562500000D+03 | 0.966929912352D+00 |
| | | | | | | -0.170364239211D-09 | 0.100000000000D+01 | 0.154700000000D+04 |
| | | | | | | 0.200000000000D+01 | 0.630000000000D+02 | -0.130385160446D-07 |
| | | | | | | 0.000000000000D+00 | 0.000000000000D+00 | 0.000000000000D+00 |



广播星历轨道信息

中科院
上海天文台

$a^{1/2}$

半长轴的平方根

e

离心率

Ω_0

轨道平面升交点经度

i_0

倾角

ω

近地点角距

M_0

平近点角

Δn

平运动差

升交点速率





广播星历轨道信息

中科院上海天文台

$i\dot{D}ot$

倾角速率

C_{uc}, C_{us}

升交角距的摄动改正项

C_{rc}, C_{rs}

地心距的摄动改正项

C_{ic}, C_{is}

倾角的摄动改正项

t_{oe}

参考历元

a_0

卫星钟偏差

a_1

卫星钟漂移

a_2

卫星钟频率漂移





星历计算

$$\mu = 3.986004418 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

地球引力场常数

$$\dot{\Omega}_e = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

地球自转速度

$$a = (\sqrt{a})^2$$

地球长半轴

$$n_0 = \sqrt{\mu/a^3}$$

计算的平运动

$$t_k = t - t_{oe}$$

从参考历元开始的时间

$$n = n_0 + \Delta n$$

改正后的平运动



星历计算

$$M_k = M_0 + nt_k$$

平近点角

$$M_k = E_k - e \sin E_k$$

偏近点角 (开普勒方程)

$$\cos v_k = (\cos E_k - e) / (1 - e \cos E_k)$$

真近点角

$$\sin v_k = \sqrt{1 - e^2} \sin E_k / (1 - e \cos E_k)$$

$$E_k = \cos^{-1} \left(\frac{e + \cos v_k}{1 + e \cos v_k} \right)$$

偏近点角



星历计算

$$u_k = v_k + \omega$$

升交角距

$$\delta u_k = C_{uc} \cos 2u_k + C_{us} \sin 2u_k$$

升交角距二阶摄动

$$\delta r_k = C_{rc} \cos 2u_k + C_{rs} \sin 2u_k$$

地心向径二阶摄动

$$\delta i_k = C_{ic} \cos 2u_k + C_{is} \sin 2u_k$$

倾角二阶摄动

$$u = u_k + \delta u_k$$

改正后的升交角距



星历计算

$$r = a(1 - e \cos E_k) + \delta r_k$$

改正后的地心向径

$$i = i_0 + \delta i_k + (iDot)t_k$$

改正后的倾角

$$x = r \cos u$$

$$y = r \sin u$$

在轨道面中的位置

$$\Omega = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \omega_e)t_k - \omega t_{oe}$$

改正后的升交点经度



星历计算

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R(-\Omega)P(-i) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

卫星在空间坐标系中的坐标

$$X = x \cos \Omega - y \cos i \sin \Omega$$

$$Y = x \sin \Omega + y \cos i \cos \Omega$$

$$Z = y \sin i$$

t_{oe} 参考历元时间, t 为信号发射时间 (GPS时间系统), t_k 为时间 t 和参考历元 t_{oe} 之间的实际总的时间差, 若 t_k 大于 302400, 则减去 604800, 若 t_k 小于 -302400, 则加上 604800。



1、伪距观测量

设 t_R 为GPS接收机获得的信号接收时间， t_R （GPS）为相应的GPS时间系统的信号接收时间； t^S 为GPS卫星发射的信号发射时间， t^S （GPS）为相应的GPS时间系统的信号发射时间； δ_R 为GPS接收机的钟差（相对于GPS时间系统）， δ^S 为GPS卫星的钟差（相对于GPS时间系统）；则

$$t_R = t_r + \delta_r$$

$$t^S = t^s + \delta^s$$



1、伪距观测量

$$\Delta t = t_R - t^S = [t_r + \delta_r] - [t^r + \delta^s] = \Delta t + \Delta \delta$$

其中：

$$\Delta t = t_R - t^S \qquad \Delta \delta = \delta_r - \delta^s$$

伪距为：

$$P = c\Delta t = c\Delta t + c\Delta \delta = \rho + c\Delta \delta$$

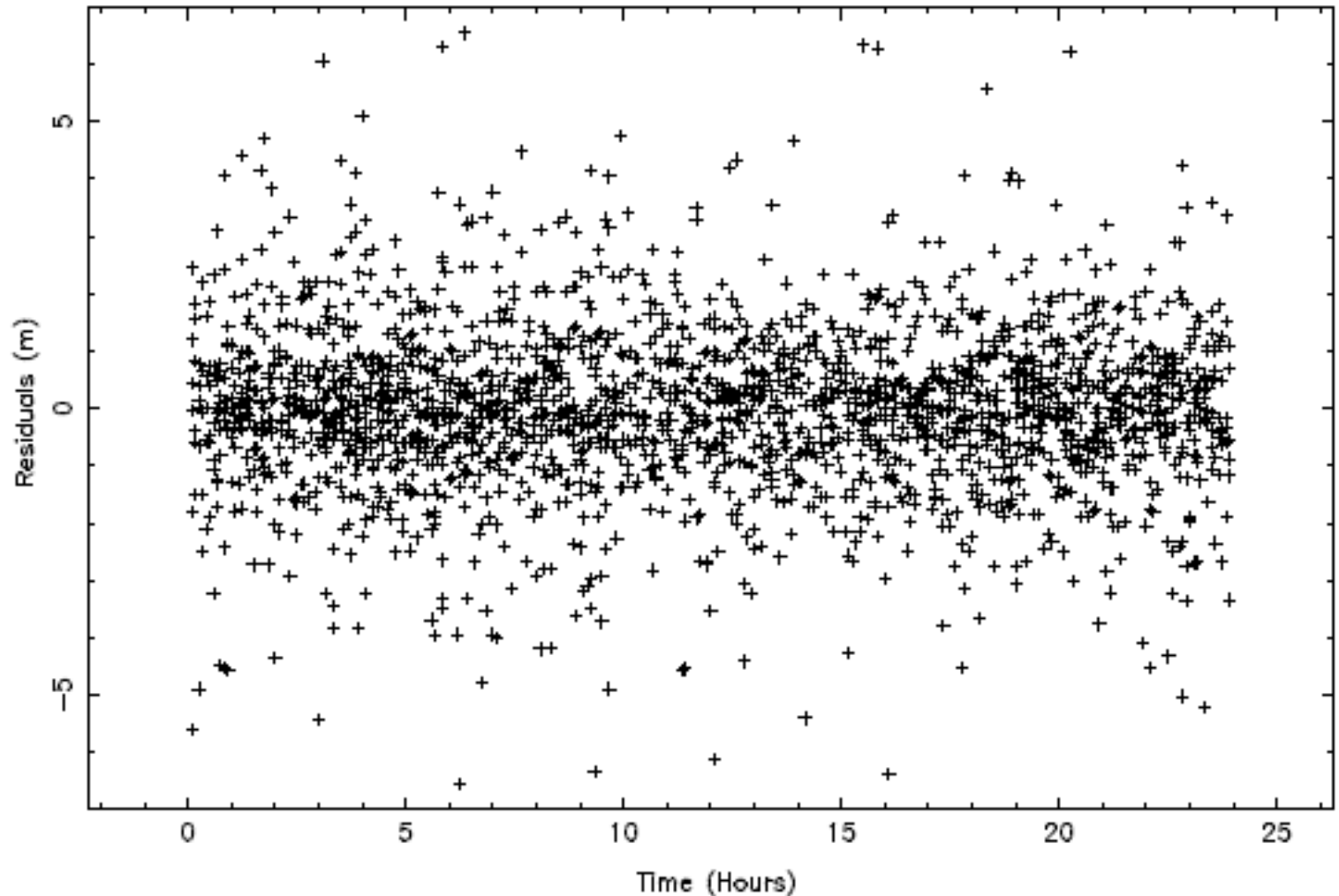
名义发射时间为：

$$t^S = t_R - P/c$$



1、伪距观测量

P码： 10—30cm

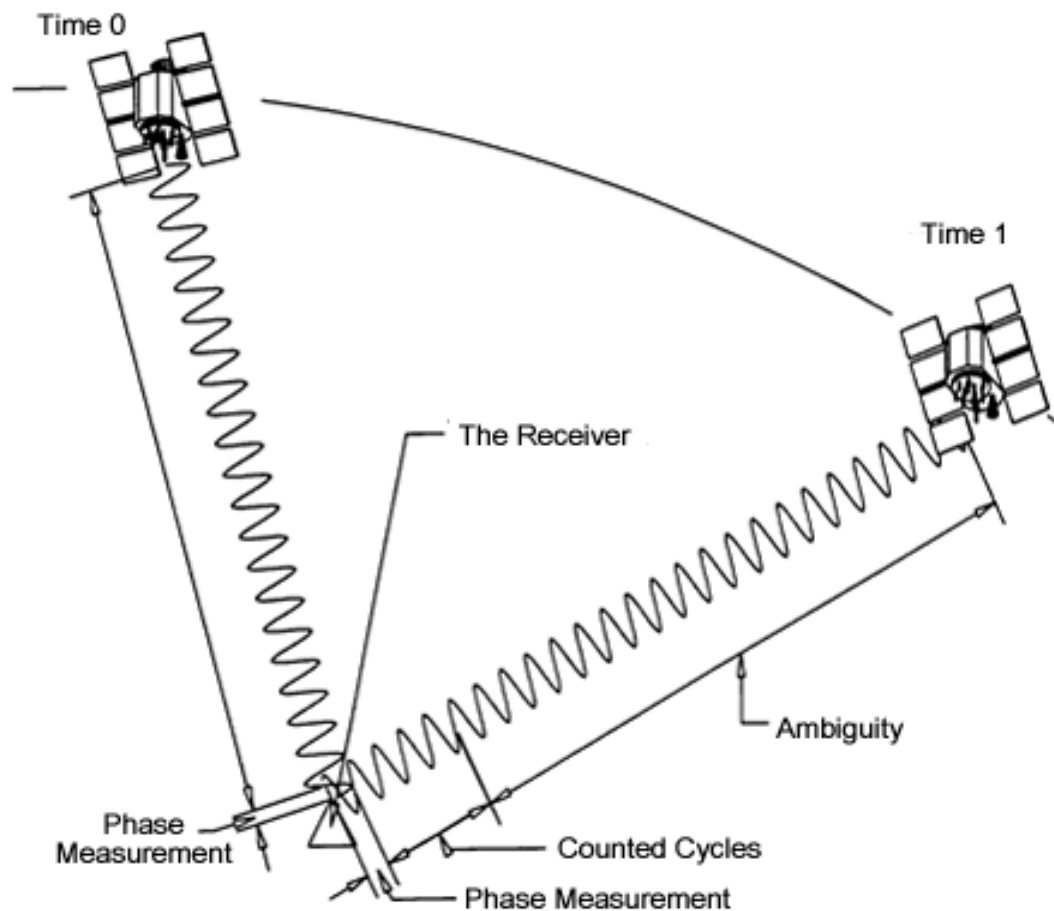


(a) Normal code residuals



2、相位观测量

GPS接收机在开机后, 经过一定时间在Time 0 锁定卫星, 获取了第一个观测数据, 这个数据一般是任意波长的整数倍+小数。之后的历元, 接收机对信号进行周数的累加+小数的变化 (两者共同反映了卫星与接收机相对位置的变化)





2、相位观测量

设 $\phi^S(t)$ 为GPS接收机接收到的以频率 f^S 重建的相位， $\phi_R(t)$ 为GPS接收机以频率 f_R 产生的相位；卫星到接收机的传播距离为 ρ ， t 相对于GPS时间系统，则：

$$\varphi = \int_{t_0}^t f dt \quad \varphi = f(t - t_\rho) = f\left(t - \frac{\rho}{c}\right)$$



2、相位观测量

由上面相位方程得：

$$\varphi^S(t) = f^S t - f^S \frac{\rho}{c} - \varphi_0^S \quad \varphi_R(t) = f_R t - \varphi_{0R}$$

其中初始相位由钟差产生：

$$\varphi_0^S = -f^S \delta^S \quad \varphi_{0R} = -f_R \delta_R$$

则观测相位为：

$$\varphi_R^S(t) = \varphi^S(t) - \varphi_R(t) = -f^S \frac{\rho}{c} + f^S \delta^S - f_R \delta_R + (f^S - f_R)t$$



2、相位观测量

忽略频率 f^S ， f_R 与名义频率 f 的差，相位可表示为：

$$\varphi_R^S(t) = -f \frac{\rho}{c} - f\Delta\delta$$

若初始相位 $\Delta\phi_0$ 假设为零

则相位观测值为：

$$\phi = \frac{1}{\lambda} \rho + \frac{c}{\lambda} \Delta\delta + N$$

$$\Phi = \lambda\phi = \rho + c\Delta\delta + \lambda N$$



2、相位观测量

距离观测噪声：C/A码：10—300m

P码： 10—30cm

相位： 0.2—5mm



2、相位观测量

伪距和相位观测实用方程： 设 P_1 、 P_2 为伪距观测值， L_1 、 L_2 为相位观测值（以长度为单位）， i 为卫星星号， k 为接收机号， I 为电离层改正， Δtr 为对流层改正， n_1 、 n_2 为整周模糊度，则观测方程可表示为：

$$P_{1k}^i = \rho_k^i + I_k^i + \Delta tr_k^i + c\delta_k - c\delta^i$$

$$P_{2k}^i = \rho_k^i + \frac{f_1^2}{f_2^2} I_k^i + \Delta tr_k^i + c\delta_k - c\delta^i$$

$$L_{1k}^i = \rho_k^i - I_k^i + \Delta tr_k^i + c\delta_k - c\delta^i + \lambda_1 N_{1k}^i$$

$$L_{2k}^i = \rho_k^i - \frac{f_1^2}{f_2^2} I_k^i + \Delta tr_k^i + c\delta_k - c\delta^i + \lambda_2 N_{2k}^i$$



3、观测值的组合（消电离层）

$$P_{1k}^i = \rho_k^i + I_k^i + \Delta tr_k^i + c\delta_k - c\delta^i$$

$$P_{2k}^i = \rho_k^i + \frac{f_1^2}{f_2^2} I_k^i + \Delta tr_k^i + c\delta_k - c\delta^i$$

$$L_{1k}^i = \rho_k^i - I_k^i + \Delta tr_k^i + c\delta_k - c\delta^i + \lambda_1 N_{1k}^i$$

$$L_{2k}^i = \rho_k^i - \frac{f_1^2}{f_2^2} I_k^i + \Delta tr_k^i + c\delta_k - c\delta^i + \lambda_2 N_{2k}^i$$

$$P_3^j = \frac{1}{f_1^2 - f_2^2} (f_1^2 P_1^j - f_2^2 P_2^j) = \rho^j + c\delta - c\delta^j$$

$$L_3^j = \frac{1}{f_1^2 - f_2^2} (f_1^2 L_1^j - f_2^2 L_2^j) = \rho^j + c\delta - c\delta^j + \frac{1}{f_1^2 - f_2^2} (f_1^2 \lambda_1 n_1^j - f_2^2 \lambda_2 n_2^j)$$



3、观测值的组合（求电离层）

$$P_{1k}^i = \rho_k^i + I_k^i + \Delta tr_k^i + c\delta_k - c\delta^i$$

$$P_{2k}^i = \rho_k^i + \frac{f_1^2}{f_2^2} I_k^i + \Delta tr_k^i + c\delta_k - c\delta^i$$

$$L_{1k}^i = \rho_k^i - I_k^i + \Delta tr_k^i + c\delta_k - c\delta^i + \lambda_1 N_{1k}^i$$

$$L_{2k}^i = \rho_k^i - \frac{f_1^2}{f_2^2} I_k^i + \Delta tr_k^i + c\delta_k - c\delta^i + \lambda_2 N_{2k}^i$$

$$P_4^j = P_1^j - P_2^j = \frac{f_1^2 - f_2^2}{f_2^2} I^j$$

$$L_4^j = L_1^j - L_2^j = \frac{f_1^2 - f_2^2}{f_2^2} I^j + \lambda_1 n_1^j - \lambda_2 n_2^j$$



3、观测值的组合

| LC | Description | Wavelength in cm | Noise rel to L_1 | Ionosphere rel to L_1 |
|-------|----------------------|---------------------|-----------------------|----------------------------|
| L_1 | Basic carrier | 19 | 1.0 | 1.0 |
| L_2 | Basic carrier | 24 | 1.0 | 1.6 |
| L_3 | Ionosphere-free LC | 0 | 3.0 | 0.0 |
| L_4 | Geometry-free LC | ∞ | 1.4 | 0.6 |
| L_5 | Wide-lane LC | 86 | 5.7 | 1.3 |
| L_6 | Melbourne-Wüebben LC | 86 | 0.7 | 0.0 |