

Bancroft 算法用于坐标初值计算

1 前言

对于地面固定站测站的近似坐标可以较为精确地获取,但是对于动态的测站,例如高速运动的飞机,一般很难精确地知道每个观测历元的近似坐标。获取近似坐标一般采用迭代的方法,即:不采用任何的坐标信息,通过反复迭代得到精确的坐标。但是有时候迭代搜索的收敛速度较慢,时间较长。但是在有些情况下迭代不一定收敛[1]。另外,在采用 GPS 进行低轨卫星实时定轨中,也对计算速度有更高的要求。在这些要求下快速获取定位初值有助于数据处理的快速精确进行。基于此,本文介绍 Bancroft 算法,并将其应用于低轨卫星初轨计算,结果显示该算法计算简单有效。

2 Bancroft 算法

考虑误差因素,对于卫星 j ,伪距观测值的无电离层影响线性组合 P 定义如下[2]:

$$P^j = \frac{1}{f_1^2 - f_2^2} (f_1^2 P_1^j - f_2^2 P_2^j) = \rho^j + c\delta - c\delta^j + \Delta P^j \quad (1)$$

式中, f_1, f_2 分别为 GPS 卫星两个载波的频率, P_1^j, P_2^j 为两个载波上的伪距观测值, ρ^j 为卫星到接收机的几何距离, δ 为接收机钟差, δ^j 为卫星 j 的钟差, ΔP^j 为该组合的误差因子。假设卫星钟已知,忽略误差因子,(1)式可以写为:

$$P^j = \sqrt{(x^j - x)^2 + (y^j - y)^2 + (z^j - z)^2} + c\delta \quad (2)$$

式中, P^j 已经对 GPS 钟差进行了改正。 x^j, y^j, z^j 为第 j 颗 GPS 卫星的坐标。定义 $b = c\delta$, 将(2)重新写为:

$$P^j - b = \sqrt{(x^j - x)^2 + (y^j - y)^2 + (z^j - z)^2} \quad (3)$$

对上式平方得到:

$$\begin{aligned} P^{j^2} - 2P^j b + b^2 &= (x^j - x)^2 + (y^j - y)^2 + (z^j - z)^2 \\ &= x^{j^2} - 2x^j x + x^2 + y^{j^2} - 2y^j y + y^2 + z^{j^2} - 2z^j z + z^2 \end{aligned} \quad (4)$$

对上式进行整理得到:

$$\begin{aligned} (x^{j^2} + y^{j^2} + z^{j^2} - P^{j^2}) - 2(x^j x + y^j y + z^j z - P^j b) \\ = -(x^2 + y^2 + z^2 - b^2) \end{aligned} \quad (5)$$

定义 Lorentz 内积为[2]:

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle = \mathbf{g}^T \mathbf{M} \mathbf{h} \quad (6)$$

其中, $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathbf{R}^4, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

根据(6)式的定义，将(5)式写为：

$$\frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} \bar{r}^j \\ P^j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{r}^j \\ P^j \end{bmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{bmatrix} \bar{r}^j \\ P^j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{r} \\ b \end{bmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} \bar{r} \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{r} \\ b \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \quad (7)$$

式中 \bar{r}^j 为 GPS 卫星的坐标矢量， \bar{r} 为测站的坐标矢量。对于每一颗卫星的伪距观测值，都能建立以上方程。式中待求参数为坐标矢量 \bar{r} 以及钟差参数 b ，因而从理论上只要有 4 颗卫星就能够求解。定义：

$$B = \begin{pmatrix} x^1 & y^1 & z^1 & P^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & P^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & P^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 & P^4 \end{pmatrix} \quad (8)$$

则对于 4 颗卫星的伪距观测方程写为：

$$\alpha - BM \cdot \begin{bmatrix} \bar{r} \\ b \end{bmatrix} + A\tau = 0 \quad (9)$$

其中， α 为 4×1 的向量，其分量为：

$$\alpha_j = \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} \bar{r}^j \\ P^j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{r}^j \\ P^j \end{bmatrix} \right\rangle \quad (10)$$

$$A = (x^2 + y^2 + z^2 - b^2) = \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} \bar{r} \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{r} \\ b \end{bmatrix} \right\rangle \quad (11)$$

$$\tau = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T \quad (12)$$

(9)中的待求参数为 $\begin{bmatrix} \bar{r} \\ b \end{bmatrix}$ ，按照矩阵变换，(9)的解为：

$$\begin{bmatrix} \bar{r} \\ b \end{bmatrix} = MB^{-1}(\alpha + A\tau) \quad (13)$$

将(13)代入(9)有，

$$\begin{aligned} & \alpha - (\alpha + A\tau) + A\tau = 0 \\ \Rightarrow & \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} \bar{r} \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{r} \\ b \end{bmatrix} \right\rangle \tau + A\tau = 0 \\ \Rightarrow & \left\langle MB^{-1}(\alpha + A\tau), MB^{-1}(\alpha + A\tau) \right\rangle \tau + 2A\tau = 0 \\ \Rightarrow & \left\langle B^{-1}\tau, B^{-1}\tau \right\rangle A^2 + 2 \left[\left\langle B^{-1}\tau, B^{-1}\alpha \right\rangle - 1 \right] A + \left\langle B^{-1}\alpha, B^{-1}\alpha \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

通过(14)式得到参数 A 的值。将 A 代入(13)中，求得最终参数 $\begin{bmatrix} \bar{r} \\ b \end{bmatrix}$ 的值。但是由于(14)

是二项式，因而 A 有两个解，此时可以根据求得的初值计算接收机距任意一颗观测到的 GPS

的距离，就能够判断哪个是需要的解。

上面介绍的是基于 4 颗 GPS 卫星的解，但是实际上大部分情况下观测到的卫星会多于 4 颗，设实际观测到的卫星个数为 n ，则(9)中，

$$B = \begin{pmatrix} x^1 & y^1 & z^1 & P^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & P^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & y^n & z^n & P^n \end{pmatrix} \quad (15)$$

α 为 $n \times 1$ 的向量， τ 为 $n \times 1$ 的向量(每个元素都是 1)。此时由于 B 不是方阵，不能直接求逆。此时将(9)式写为：

$$B^T \alpha - B^T B M \cdot \begin{bmatrix} \bar{r} \\ b \end{bmatrix} + B^T A \cdot \tau = 0 \quad (16)$$

以 $\begin{bmatrix} \bar{r} \\ b \end{bmatrix}$ 为参数，(16)的解为：

$$\begin{bmatrix} \bar{r} \\ b \end{bmatrix} = M (B^T B)^{-1} B^T (\alpha + A \tau) \quad (17)$$

按照与(14)同样的计算方法，可以得到(16)中 A 的解为：

$$\begin{aligned} & \left\langle (B^T B)^{-1} B^T \tau, (B^T B)^{-1} B^T \tau \right\rangle \Lambda^2 \\ & + 2 \left[\left\langle (B^T B)^{-1} B^T \tau, (B^T B)^{-1} B^T \alpha \right\rangle - 1 \right] A + \left\langle (B^T B)^{-1} B^T \alpha, (B^T B)^{-1} B^T \alpha \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

得到 A 的值。将 A 代入(17)中，求得最终参数 $\begin{bmatrix} \bar{r} \\ b \end{bmatrix}$ 的值。

在采用上述 Bancroft 算法，计算量小，而且不需要迭代。但是由于无法知道测站坐标的初值，因而与坐标有关的各种改正(对流层，相对论效应等)无法求得。不过，不采用这些改正得到近似坐标一般就能够满足近似坐标的精度要求。如果需要更为精确的近似坐标，可以在求得概略坐标之后，考虑各种改正，再次采用该算法进行计算。此时的迭代相比没有任何信息所进行的迭代来看，已经减少了很多的计算量。因而采用该算法能够大大提高计算的速度。并且由于计算过程中不涉及任何的矩阵求逆计算，因而该算法不存在发散的问题。

3 卫星初轨计算

CHAMP 卫星距离地面几百公里，其运动速度远大于地面载体(>7km/s)，卫星上搭载了 GPS 接收机，用于动态定位。与地面测站一致，CHAMP 卫星的 GPS 观测值也提供了标准的 RINEX 格式文件。为验证该算法的有效性，文章对 CHAMP 卫星 2004 年 191 的星载 GPS 观测数据进行了分析。图 1 表示了采用 Bancroft 算法与采用最小二乘解迭代求解得到轨道之间的差值，其中最小二乘解轨道相对参考精密轨道 PSO [3,4]，差值的 RMS 为 1.21m，该精度与 CHAMP 卫星伪距观测量的精度相当。从图 1 我们可以发现，除去少数跳跃点外，Bancroft 算法与最小二乘解的差别在分米级，这也说明采用 Bancroft 算法得到的轨道近似值精度已经在伪距定位的精度范围之内。

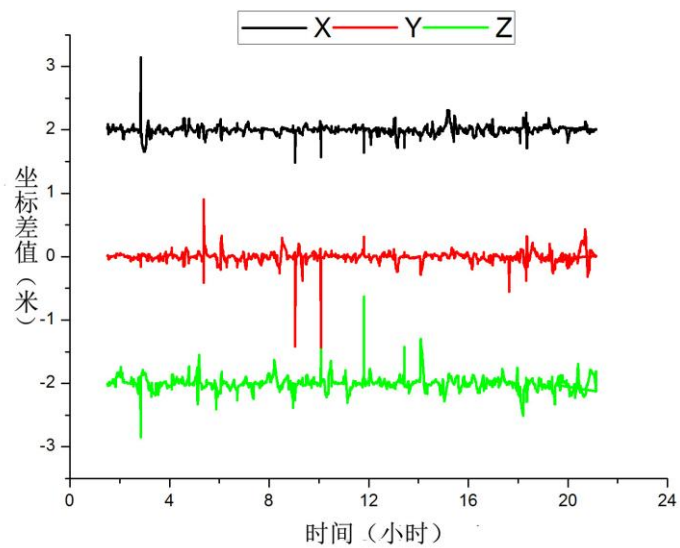


图 1 Bancroft 算法与最小二乘解的差值；为便于区分，X 方向加了 2m，Z 方向减了 2m
 Fig. 1 Orbit differences between Bancroft algorithm and Least Square Estimation solution, where X and Z components were shifted for 2m in the illustration.

4 结论

从公式的推导中我们可以看到，采用 Bancroft 算法计算简单，无需迭代，运算量少。从计算中我们也可以看到，采用伪距观测量该算法得到的轨道初值的精度与最小二乘迭代的结果相当。另外，除了应用于卫星轨道初值计算外，该算法还可以应用于所有测距定位中的近似坐标计算（例如 GPS 动态定位、传统测边网等）。

参考文献