第 32 卷第 1 期
2004 年 1 月

同 济 大 学 学 报
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY

Vol.32 No.1
Jan. 2004

椭球曲面的拟合

王解先，陈俊平，张春艳

（同济大学 测量与国土信息工程系，上海 200092）

摘要：为测定空间一任意放置的椭球形状设备的变形，可根据由全站仪采集到的设备表面离散点的坐标，来求得椭球体的空间位置和大小.讲述了通用二次曲面拟合的误差方程和法方程的组成，介绍了运用 Jacobi 变换方法来处理系数相关性问题和法方程的求解，还介绍了将通用系数形式转化为标准椭球方程的方法，从而求得观测坐标系与椭球主轴坐标系之间的关系，最后求得椭球在空间的位置、方向和大小，以及椭球体的形变值.

关键词：椭球；空间定位；形变

中图分类号：P 226　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0253－374X(2004)01－0082－04

Fitting of Ellipsoidal Surface

WANG Jie-xian, *CHEN Jun-ping*, *ZHANG Chun-yan*

(Department of Surveying and Geomatics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: In order to get the distortion of ellipsoidal equipment in space, we can fit the ellipsoidal surface by using coordinates of points spreading around it. In this paper we describe how to form observation equations and normal equations when fitting general conicoid. Jacobi transformation is used to find correlations among coefficients and to solve normal equation. Then we introduce a method to transform general conicoid to formal ellipsoidal equation. The location, direction and size of ellipsoid are obtained. The distance between observed points and the fitted surface is just the distortion of the equipment.

Key words: ellipsoid; space status; distortion

位于空间的一个椭球形状的设备，为了观测其形变，可在其周围布设一个控制网，在椭球体表面贴一些标志，采用全站仪观测这些点的三维坐标.

若将坐标系的原点取在椭球体的中心，3 个轴 (x, y, h) 的方向与椭球的主轴方向一致，称为主轴坐标系.但由于全站仪观测时，需以地平面为准，取一方向为北方向，因此观测采用的坐标系 (x', y', h') 与椭球主轴方向并不一致，需要根据椭球体表面的离散点坐标 (x'_i, y'_i, h'_i)，$i = 1, 2, \cdots, n$，n 为观测点数，求空间椭球体的位置、方向和大小，椭球体的形变就是这些观测点与拟合出的椭球体表面的距离.本文根据离散点坐标，运用 Jacobi 变换，并得出了椭球体的标准方程，得出了其形变量.

1　拟合二次曲面一般方程

1.1　误差方程的建立

为了避免坐标数值过大而引起的数值计算问题，将观测坐标中心化，即

收稿日期：2003－04－03
基金项目：国家自然科学基金资助项目(40074002)
作者简介：王解先(1963－)，男，江苏常州人，教授，工学博士.E-mail: jiexian@citiz.net

$$\begin{bmatrix} x''_i \\ y''_i \\ h''_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \\ h'_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{h}' \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中:$\bar{x}'$,$\bar{y}'$,$\bar{h}'$为测得坐标分量的均值.

在平移后的坐标系中,空间任意二次曲面的方程可表示为

$$a_0 + a_1x'' + a_2y'' + a_3h'' + a_4x''y'' + a_5y''h'' + a_6h''x'' + a_7x''^2 + a_8y''^2 + a_9h''^2 = 0 \tag{2}$$

式中:a_i 为拟合系数.

由于存在观测误差和变形,观测坐标$(x''_i, y''_i, h''_i)^{\mathrm{T}}$不满足式(2),将其不符合部分作为观测值,列出误差方程

$$V_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1x''_i + \hat{a}_2y''_i + \hat{a}_3h''_i + \hat{a}_4x''_iy''_i + \hat{a}_5y''_ih''_i + \hat{a}_6h''_ix''_i + \hat{a}_7x''^2_i + \hat{a}_8y''^2_i + \hat{a}_9h''^2_i \tag{3}$$

其矩阵形式为 $\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{A}_i\Delta a - \boldsymbol{L}_i$,组成法方程[1]

$$\boldsymbol{N}\Delta a = \boldsymbol{C} \tag{4}$$

式中:$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$,为法方程系数阵,$\boldsymbol{A}$ 为误差矩阵;$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}$,$\boldsymbol{L}$ 为常数向量;Δa 为拟合系数改正数.

1.2 法方程的求解

从式(3)和式(4)可以看出,法方程系数阵 $\boldsymbol{N}$ 的主元大小差别很大,这对法方程求解不利,另外,可以想象,不能保证 $a_1,\cdots,a_9$ 相互独立,因此 $\boldsymbol{N}$ 很可能不能直接求逆. 因为 $\boldsymbol{N}$ 是实对称矩阵,按线性代数,$\boldsymbol{N}$ 存在实数特征根$\lambda_1,\cdots,\lambda_9$ 和特征向量矩阵 $\boldsymbol{R}$ 满足:

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{5}$$

式中:$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_9 \end{bmatrix}$.

特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_9$ 和特征向量矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的求解,可采用适合计算机的 Jacobi 正交变换方法[2].

1.2.1 Jacobi 方法的原理

Jacobi 方法就是寻找一个正交矩阵序列$\{\boldsymbol{S}_k\}$,使得

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\cdots\boldsymbol{S}_k = \boldsymbol{R} \tag{6}$$

这样就有 $\boldsymbol{T}_k = \boldsymbol{S}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{k-1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\cdots\boldsymbol{S}_k = \boldsymbol{\Lambda}$, $k \to \infty$ (7)

因此,对于充分大的 k,便可以利用 $\boldsymbol{T}_k$ 的对角线元素作为$\boldsymbol{N}$ 的特征根的近似,取 $\boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\cdots\boldsymbol{S}_k$ 作为矩阵$\boldsymbol{N}$ 的近似特征向量矩阵.

定义

$$\boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{N}, \boldsymbol{Q}_k = \boldsymbol{S}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{S}_k \tag{8}$$

取旋转矩阵作为正交变换矩阵 $\boldsymbol{S}_k$,

$$\boldsymbol{S}_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \cos\alpha & \cdots & & \sin\alpha & & \\ & & & \vdots & 1 & & \vdots & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & -\sin\alpha & \cdots & & \cos\alpha & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{9}$$

若处于(i,j)位置,在 $\boldsymbol{Q}_{k-1}$中的对角元下方,找出模最大的元素,取出 $\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{Q}_{ii}$,$\boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{Q}_{ij}$,$\boldsymbol{T}_3 = \boldsymbol{Q}_{jj}$,有

$$\begin{cases} \cot 2\alpha = \dfrac{\boldsymbol{T}_3 - \boldsymbol{T}_1}{2\boldsymbol{T}_2} = \xi \\ c = \tan\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{\xi + \sqrt{1+\xi^2}}, & \xi \geqslant 0 \\ -\dfrac{1}{|\xi| + \sqrt{1+\xi^2}}, & \xi < 0 \end{cases} \\ \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}, \quad \sin\alpha = c\cos\alpha \end{cases} \tag{10}$$

1.2.2 Jacobi 方法的第 k 步迭代过程

(1) 在矩阵 $\boldsymbol{Q}_{k-1}$中选报模最大的非对角元素.

(2) 根据式(10)计算得 α,代入 $\boldsymbol{Q}_k = \boldsymbol{S}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{k-1}\cdot\boldsymbol{S}_k$,即可消去该位置上的非对角元素.

(3) 重复以上过程,直至所有的非对角元素值小于设定的限值(如 10^{-12}).

1.2.3 迭代后的处理

这时,特征向量矩阵 $\boldsymbol{R}$ 为

$$\boldsymbol{R} = \prod \boldsymbol{S}_k \tag{11}$$

得到的特征根为

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{R} \tag{12}$$

调整 $\boldsymbol{R}$ 的列,使得 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中的元素按绝对值自大到小排列. 若有特征根为零(小于设定的限值),则说明 $\boldsymbol{N}$ 是奇异的,零特征根的个数就是 $\boldsymbol{N}$ 的秩亏数,说明 $a_1,\cdots,a_9$ 中有几个系数是不独立的,要找出非独立的元素,可以全组合分别固定 $a_1,\cdots,a_9$ 中的某几个系数,使得降阶后 $\boldsymbol{N}$ 的特征根均非零,这时

$$\begin{cases} N = RAR^{\mathrm{T}} \\ N^{-1} = RA^{-1}R^{\mathrm{T}} \\ \Delta a = RA^{-1}R^{\mathrm{T}}C \end{cases} \quad (13)$$

1.3 一般二次曲面的获得

迭代直至改正数足够小,便得到在平移后的观测坐标系中,二次曲面方程的一般形式,即为式(2).若定义

$$\begin{aligned} &X = [x, y, h]^{\mathrm{T}}, X' = [x', y', h']^{\mathrm{T}}, \\ &X'' = [x'', y'', h'']^{\mathrm{T}} \end{aligned} \quad (14)$$

式(2)表示为

$$a_0 + (a_1, a_2, a_3)X'' + X''^{\mathrm{T}}DX'' = 0 \quad (15)$$

式中:

$$D = \begin{bmatrix} a_7 & \frac{a_4}{2} & \frac{a_6}{2} \\ \frac{a_4}{2} & a_8 & \frac{a_5}{2} \\ \frac{a_6}{2} & \frac{a_5}{2} & a_9 \end{bmatrix} \quad (16)$$

由式(1),$X''=X'-\bar{X}'$,$\bar{X}'$为3个分量的均值,代入式(15),得到测量坐标系下二次曲面的一般形式为

$$b_0 + (b_1, b_2, b_3)X' + X'^{\mathrm{T}}DX' = 0 \quad (17)$$

式中:

$$\begin{cases} (b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3) - 2\bar{X}'D \\ b_0 = a_0 - (b_1, b_2, b_3)\bar{X}' + X'^{\mathrm{T}}D\bar{X}' \end{cases} \quad (18)$$

2 归算为标准椭球形式

对式(16)的矩阵 D,按1.2的类似方法求特征根($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$)和3×3维的特征向量矩阵 R,显然有

$$R^{\mathrm{T}}DR = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

令 $Y = R^{\mathrm{T}}X'$,即 $X' = RY$,连同式(19)代入式(17),得

$$b_0 + (c_1, c_2, c_3)Y + Y^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}Y = 0 \quad (20)$$

式中:$(c_1, c_2, c_3) = (b_1, b_2, b_3)R$,式(20)实际上消除了坐标分量之间的交叉项.因此,主轴坐标系中的坐标 X 与 Y 的关系为

$$X = Y + \left[\frac{c_1}{2\lambda_1}, \frac{c_2}{2\lambda_2}, \frac{c_3}{2\lambda_3}\right]^{\mathrm{T}} \quad (21)$$

将式(21)代入式(20),得

$$c_0 + X^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}X = 0 \quad (22)$$

比较式(22)与标准椭球方程式,得椭球体的主轴长度为

$$a = \sqrt{-\frac{c_0}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{-\frac{c_0}{\lambda_2}}, \quad c = \sqrt{-\frac{c_0}{\lambda_3}} \quad (23)$$

测量坐标系与主轴坐标系的坐标转换关系为

$$X = \left[\frac{c_1}{2\lambda_1}, \frac{c_2}{2\lambda_2}, \frac{c_3}{2\lambda_3}\right]^{\mathrm{T}} + R^{\mathrm{T}}X' \quad (24)$$

若以(α, β, γ)表示绕3个轴的旋转角,则由关系式 $R^{\mathrm{T}} = R_1(\alpha)R_2(\beta)R_3(\gamma)$,可以唯一求出3个旋转角,这时式(24)可以表示为熟悉的坐标转换公式.

$$X = X_0 + R_1(\alpha)R_2(\beta)R_3(\gamma)X' \quad (25)$$

式中的平移量 X_0 与式(24)中的对应为 $X_0 = \left[\frac{c_1}{2\lambda_1} \quad \frac{c_2}{2\lambda_2} \quad \frac{c_3}{2\lambda_3}\right]^{\mathrm{T}}$.

3 形变量的求取

椭球体形的设备,经过一段时间的运行,产生形变,以上的方法可以求出椭球的参数,若要纠正形变,则需要求得各观测点处的形变量,相当于各观测点离开标准椭球的距离,此距离可以是垂直距离,参考面为椭球面的切面,为了方便纠正,变形量也可表示为以椭球中心为准的凹凸量.

各观测点的测量坐标(x'_i, y'_i, h'_i),$i = 1, 2, \cdots, n$,n 为观测点数,由式(25)转为椭球主轴坐标系坐标(x, y, h),若表示为球坐标的形式(ρ, φ, λ),

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2} \\ \sin\varphi = \frac{h}{\rho}, \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\rho} \\ \sin\lambda = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\lambda = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad (26)$$

各观测点与椭球中心的连线与椭球的交点坐标表示在椭球主轴坐标系中为($a\cos\varphi\cos\lambda, b\cos\varphi \cdot \sin\lambda, c\sin\varphi$),它与观测坐标($x, y, h$)之差的模就是

形变量，即椭球表面的凹凸量.

4 算例

表1中的x'，y'，h'是利用全站仪获得的某椭球形状设备表面点的实测坐标.

表1 椭球形状设备表面点的实测坐标

Tab.1 Coordinates of points surveyed m

序号	x'	y'	h'	形变量
1	−19.428 0	22.762 0	−9.191 0	−0.000 1
2	−21.553 0	26.435 0	−9.902 0	−0.000 1
3	−24.122 0	29.679 0	−10.715 0	0
4	−27.055 0	32.389 0	−11.606 0	−0.000 1
5	−30.263 0	34.486 0	−12.544 0	0.000 1
6	−33.648 0	35.905 0	−13.505 0	0.000 1
7	−37.111 0	36.604 0	−14.457 0	0.000 1
8	−40.542 0	36.560 0	−15.371 0	0
9	−43.838 0	35.776 0	−16.223 0	0
10	−46.900 0	34.275 0	−16.983 0	−0.000 1
11	−49.636 0	32.103 0	−17.630 0	0
12	−51.959 0	29.325 0	−18.143 0	0
13	−50.680 0	−2.065 0	−16.577 0	−0.000 1
14	−48.112 0	−5.307 0	−15.765 0	0.000 1
15	−45.178 0	−8.018 0	−14.874 0	0
16	−41.970 0	−10.114 0	−13.935 0	0
17	−38.584 0	−11.533 0	−12.974 0	0
18	−35.122 0	−12.231 0	−12.020 0	0
19	−31.690 0	−12.188 0	−11.107 0	0.000 1
20	−28.395 0	−11.404 0	−10.256 0	0.000 1
21	−25.333 0	−9.903 0	−9.496 0	0.000 1
22	−22.599 0	−7.729 0	−8.851 0	−0.000 2
23	−20.276 0	−4.953 0	−8.337 0	−0.000 1
24	−18.433 0	−1.655 0	−7.973 0	0

将表1中的观测坐标利用式(1)进行坐标平移，在平移后的坐标系(x''，y''，h'')中根据式(3)列误差方程，平差后求得拟合参数为

$$\{a_0, a_1, \cdots, a_9\}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -3\,743.671\,529 \\ -0.063\,394 \\ -0.003\,398 \\ 0.049\,624 \\ 1.587\,024 \\ 5.029\,255 \\ -7.722\,156 \\ 7.414\,424 \\ 6.448\,990 \\ 59.974\,888 \end{bmatrix}$$

利用式(16)，(17)，(18)求得测量坐标系(x'，y'，h')中拟合系数$b_0, b_1, \cdots, b_9$为

$$\{b_0, b_1, \cdots, b_9\}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 12\,196.406\,052 \\ 414.006\,495 \\ -33.273\,339 \\ 1\,247.895\,956 \\ 1.587\,024 \\ 5.029\,255 \\ -7.722\,156 \\ 7.414\,424 \\ 6.448\,990 \\ 59.974\,888 \end{bmatrix}$$

根据式(25)得到标准椭球坐标系与测量坐标系间对应的参数关系为旋转角(rad)：

$$\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1.477\,274\,125\,299\,71, 3.728\,226\,488\,974\,32, 1.484\,271\,266\,028\,94\}$$

平移量(m)：

$$\boldsymbol{X}_0 = \{10.038\,889\,302\,873\,9, 23.634\,348\,982\,867\,4, -31.127\,566\,433\,748\,2\}$$

求出椭球后，算得的观测点处的形变量，也表示在表1中.

5 结语

对于空间一任意斜置的椭球体设备，利用全站仪采集了表面部分点的坐标后，可以由本文介绍的模型求出椭球参数和各观测点处的形变量.模型在实际工程中得到应用，有以下几点可以探讨.

(1) 若式(19)中的3个特征根中有零，则需对观测数据进行检核，例如观测点个数太少，或者观测分布不够充分，或观测点不能表示椭球.

(2) 变换式(19)中特征向量矩阵的列，可以变换特征根的次序，即变换椭球主轴的坐标次序，这时旋转角会相应变化.

(3) 本文的法方程求解方法在计算机中实现较方便，对性能不好的法方程求逆有好处.

参考文献：

[1] 樊功瑜.误差理论与测量平差[M].上海：同济大学出版社，1998.

[2] 张池平，施云慧.计算方法[M].北京：科学出版社，2002.