

工程测量中的曲线拟合

陈俊平, 王解先
(同济大学测量系, 上海 200092)

摘要: 测量中经常遇到的一些特殊二次曲线, 我们事先知道它的类型, 但是不知道方程的参数。本文利用曲线离散点的平面坐标, 通过坐标系之间的平移和旋转, 依据不同曲线标准方程的特征推导了求取参数方法, 从而达到了对曲线进行拟合的目的。并通过数据进行了验证。

关键词: 工程测量; 曲线拟合

中图分类号: TB22 **文献标识码:** B

Abstract: This paper presents a model of conic fitting effectively for field engineering surveying which is based on the coordinate displacement and the rotation between the different coordinate frames and derived from the characters of different curves. As showed in testing, this method can achieve good result.

Key words: engineering surveying; conic fitting

1 前言

工作中我们经常会对一些特殊的二次曲线 Γ (抛物线、反比例函数曲线、椭圆、双曲线等) 进行测量。为了得到曲线的方程, 测量中通常的做法是: 定义一个任意的坐标系 oxy , 测得曲线 Γ 在这个坐标系下 n 个离散点的平面坐标 (x_i, y_i) , ($i=1, 2, \dots, n$), 然后利用这些离散点的坐标求取曲线方程中的参数, 从而对曲线进行拟合。

我们定义曲线 Γ 在坐标系 oxy 下的方程为 $F(x, y) = 0$ 。其中:

$$F(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 \quad (1)$$

再定义曲线在另外一个坐标系 $o'x'y'$ 中具有标准方程 $F(x', y') = 0$ 。这样如图 1 所示, 两个坐标系之间具有以下

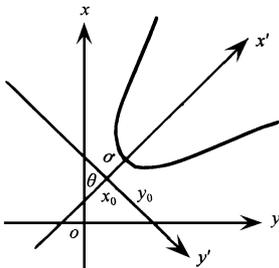


图 1 平面坐标系间的转换关系

的平移和旋转关系:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中 x_0, y_0 为坐标系 oxy 与 $o'x'y'$ 之间的平移量, θ 为从 oxy 到 $o'x'y'$ 旋转角 (顺时针为正)。

本文将根据此平移和旋转关系, 推导抛物线、反比例函

数曲线、椭圆、双曲线等的拟合方法。

2 曲线标准方程的拟合

2.1 方法简介

本文介绍的方法先对 $F(x, y) = 0$ 进行拟合, 然后通过坐标系之间的平移和旋转求得 $F(x', y') = 0$ 。为了使得矩阵中的各个元之间量级上不会相差太大, 我们先作如下变换: 令

$$x''_i = \frac{x_i - \bar{x}}{M}, y''_i = \frac{y_i - \bar{y}}{N} \quad (3)$$

其中可取 $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$, $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$, $M = \max(x_i) - \min(x_i)$, $N = \max(y_i) - \min(y_i)$ 。这样, 我们可以通过对 $F(x'', y'') = 0$ 的拟合得到 $F(x, y) = 0$ 。

根据解析几何^[1]的原理, 一条曲线在坐标系中的方程是二次的这种性质与坐标系的选取无关。因此, 变换之后的二次曲线 Γ 仍然为二次曲线且其形状不会发生改变。我们得到变换后的曲线方程为:

$$F(x'', y'') = b'_0 + b'_1x'' + b'_2y'' + b'_3x''y'' + b'_4x''^2 + b'_5y''^2 = 0 \quad (4)$$

由于曲线的形式事先是知道的, 所以我们可以对曲线方程进行合适的定义, 使得其不经过原点 $(0, 0)$, 从而使得 $b'_0 \neq 0$ 则可以将 Γ 的方程简化为:

$$F(x'', y'') = 1 + b_1x'' + b_2y'' + b_3x''y'' + b_4x''^2 + b_5y''^2 = 0 \quad (5)$$

收稿日期: 2002-12-20; 修订日期: 2003-02-27

作者简介: 陈俊平 (1980-), 男 (汉族), 江西宜春人, 硕士研究生。

其中: $b_i = b'_i / b'_0$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)。

(5) 式含有 5 个参数 (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)，而对于抛物线、反比例函数确定其方程只需要四个参数。为了求得 $F(x'', y'') = 0$ 我们可以对其增加 1 个条件方程。对于每一个观测列出误差方程及限制条件方程为:

$$\begin{cases} v_i = A\hat{x} - l_i \\ \alpha\hat{x} - W_x = 0 \end{cases} \quad (6)$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} x''_1 & y''_1 & x''_1 y''_1 & x''_1{}^2 & y''_1{}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x''_n & y''_n & x''_n y''_n & x''_n{}^2 & y''_n{}^2 \end{bmatrix}$$

$$l = \begin{bmatrix} -(1 + b_1^0 x''_1 + b_2^0 y''_1 + b_3^0 x''_1 y''_1 + b_4^0 x''_1{}^2 + b_5^0 y''_1{}^2) \\ \vdots \\ -(1 + b_1^0 x''_n + b_2^0 y''_n + b_3^0 x''_n y''_n + b_4^0 x''_n{}^2 + b_5^0 y''_n{}^2) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\hat{x} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4, \hat{\alpha}_5)^T$$

c 和 W_x 为限制条件方程的系数。($b_1^0, b_2^0, b_3^0, b_4^0, b_5^0$)^T 为参数初始值。为了得到限制条件方程，将 (3) 式代入到 (2) 式得:

$$\begin{pmatrix} Mx'' \\ Ny'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - \bar{x} \\ y_0 - \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (8)$$

将 (8) 式代入到 (5) 式中，得到曲线在 $o'x'y'$ 坐标系下的标准方程为:

$$c_0 + c_1 x' + c_2 y' + c_3 x' y' + c_4 x'^2 + c_5 y'^2 = 0 \quad (9)$$

其中:

$$\begin{cases} c_0 = 1 + b_1 x'_0 / M + b_2 y'_0 / N + b_3 x'_0 y'_0 / (MN) + b_4 x'_0{}^2 / M^2 + b_5 y'_0{}^2 / N^2 \\ c_1 = b_1 A / M + b_2 B / N + b_3 A y'_0 / (MN) + b_3 B x'_0 / (MN) + 2b_4 A x'_0 / M^2 + 2b_5 B y'_0 / N^2 \\ c_2 = -b_1 B / M + b_2 A / N + b_3 A x'_0 / (MN) - b_3 B y'_0 / (MN) - 2b_4 B x'_0 / M^2 + 2b_5 A y'_0 / N^2 \\ c_3 = b_3 A^2 - b_3 B^2 / (MN) - 2b_4 AB / M^2 + 2b_5 AB / N^2 \\ c_4 = b_3 AB / (MN) + b_4 A^2 / M^2 + b_5 B^2 / N^2 \\ c_5 = -b_3 AB / (MN) + b_4 B^2 / M^2 + b_5 A^2 / N^2 \end{cases} \quad (10)$$

式中 $A = \cos \theta$, $B = \sin \theta$, $x'_0 = x_0 - \bar{x}$, $y'_0 = y_0 - \bar{y}$

利用上面推导的标准方程，下面本文将就不同曲线推导其限制条件方程。

2.2 限制条件方程的求取

(1) 抛物线

按照 (9) 式，我们定义 $o'x'y'$ 坐标系下抛物线的标准方程为 $c_0 + c_1 x' + c_5 y'^2 = 0$ 从而在 (10) 式就有:

$$c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0 \quad (11)$$

由 $c_3 = 0, c_4 = 0$ 导出抛物线方程 (5) 中的限制条件为:

$$b_3^2 = 4b_4 b_5 \quad (12)$$

(2) 反比例函数

按照 (9) 式，我们定义 $o'x'y'$ 坐标系下反比例函数的标准方程为 $c_0 + c_3 x' y' = 0$ 从而在 (10) 式就有

$$c_1 = 0, c_2 = 0, c_4 = 0, c_5 = 0 \quad (13)$$

由 $c_4 = 0, c_5 = 0$ 导出反比例函数方程 (5) 中的限制条件为:

$$N^2 b_4 + M^2 b_5 = 0 \quad (14)$$

2.3 曲线标准方程的求取

过程如下:

(1) 得到限制条件方程之后，对于双曲线在 (6) 式中有:

$$c = (0, 0, 2b_3^0, -4b_4^0, -4b_5^0)^T, W_x = 4b_4^0 b_5^0 - b_3^0{}^2 \quad (15)$$

对于反比例函数在 (6) 式中有:

$$c = (0, 0, 0, 1/M, 1/N)^T, W_x = -b_4^0 / M^2 - b_5^0 / N^2 \quad (16)$$

对 (6) 式按带约束条件的间接平差^[2]进行迭代求解，解出未知参数 b_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)。

(2) 解出 $F(x'', y'') = 0$ 的参数后，利用 (3) 式求得方程 $F(x, y) = 0$ 。

(3) 对抛物线按 (11) 式，对反比例函数按 (13) 式求得转换参数 (x_0, y_0, θ)。

(4) 利用求得的转换参数 (x_0, y_0, θ)，按照 (2) 式求得曲线的标准方程 $F(x', y') = 0$ 。

对于椭圆和双曲线，由于它们方程的确定需要 5 个参数，所以不需要对 (5) 式加限制条件，直接按照间接平差就能够解出参数 b_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)。

采用与抛物线、反比例函数方程拟合类似的方法，根据 (9) 式，在其方程中有:

$$c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0 \quad (17)$$

由 (17) 式求得转换参数 (x_0, y_0, θ)。进而可以求得曲线的标准方程 $F(x', y') = 0$ 。

离散点的坐标

表 1

点号	实测的坐标		变换后的坐标	
	x	y	x''	y''
1	11 3359	-4 0299	-0.0031	-0.1064
2	8 8755	-3 7061	-0.0192	-0.1036
3	5 6609	-3 9511	-0.0403	-0.1057
4	0 8689	-5 3858	-0.0717	-0.1180
5	-8 2093	-10 0531	-0.0957	-0.1323
6	-17 5779	-16 0291	-0.1928	-0.2098
7	-38 7846	-30 9333	-0.3320	-0.3383
8	-143 685	-108 9584	-1.0204	-1.0108
9	164 1763	124 317	1.0000	1.0000
10	62 4268	48 6683	0.3322	0.3479
11	26 769	25 0447	0.0982	0.1443
12	18 3593	21 9712	0.0430	0.1178
13	16 628	21 7552	0.0317	0.1159
14	13 855	21 8432	0.0135	0.1167

参数	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
数值	1.01083	-0.10844	0.14293	-0.00328	0.00574	-0.00574
中误差	$1.61376E-06$	$2.61102E-07$	$3.30093E-07$	$4.30408E-08$	$1.82870E-08$	$9.71414E-09$

3 算例

为了对本文介绍的方法进行验证, 对于某个反比例函数曲线我们测量了一些离散点, 运用上文介绍的方法, 对其系数进行了求解, 拟合了其方程。

求得 $(x_0, y_0, \theta) = (12.02100, 9.01201, 127^\circ 01' 23'' 5086)$, $c_0 = 1, c_3 = 0.01190$ 。

即反比例函数标准方程为: $x'y' = 84$ 。

从上面的算例可以看到, 所求参数相对中误差最小的为 1.6×10^{-6} , 最大的也仅为 1.3×10^{-5} 。因而, 采用这种模型所求得的参数具有很高的精度。

运用以上方法, 我们还对抛物线、椭圆、双曲线等曲线方程进行了拟合。结果表明使用该模型同样能够取得很好的效果。

4 结束语

由于二次曲线一般方程 (5) 式里含有 5 个参数, 而确定抛物线、反比例函数只需要 4 个参数。如果直接利用二次曲线的方程直接进行拟合, 则得到的结果将与已知曲线的标准方程形式不一致, 从而不能很好地反映曲线的特征。

本文通过对不同曲线添加限制条件很好地解决了上述问题。通过推导, 对于抛物线, 其限制条件为 (12) 式; 对于反比例函数其限制条件为 (14) 式。

通过数据的验证, 运用本文介绍的方法能够很好地对二次曲线 (抛物线、反比例函数、椭圆等) 进行拟合。

参 考 文 献

- [1] 章学诚. 解析几何. 北京: 北京大学出版社, 1989.
- [2] 樊功瑜. 误差理论与测量平差. 上海: 同济大学出版社, 1998.

(上接第 58 页)

三个方程三个未知量, 采用专业软件解算方程组。我们测出某一里程盾构机上三个参数点 (3, 8, 15) 的实际三维坐标分别为:

$$\begin{aligned} x_1 &= 45336.775, x_2 = 45336.610, x_3 = 45336.461, \\ y_1 &= 29534.236, y_2 = 29535.846, y_3 = 29538.525, \\ z_1 &= -1.434, z_2 = -0.263, z_3 = -1.885 \end{aligned}$$

把以上数据代入第一组方程组, 就可以解出盾首中心的实际三维坐标为:

$$X_{\text{首}} = 45340.608, Y_{\text{首}} = 29536.538, Z_{\text{首}} = -2.975$$

在该里程上盾首中心的设计三维坐标为:

$$X_{\text{首}} = 45340.610, Y_{\text{首}} = 29536.520, Z_{\text{首}} = -2.945$$

$\Delta X = -2\text{mm}, \Delta Y = 18\text{mm}$, 盾首中心左右偏差 = $+\sqrt{(-2)^2 + (18)^2} = +18\text{mm}$ (正号表示偏右) $\Delta Z = -30\text{mm}$, 盾首中心上下偏差 = -30mm (负号表示偏下)。

代入第二组方程组, 可以解出盾尾中心的实际三维坐标为:

$$X_{\text{尾}} = 45336.280, Y_{\text{尾}} = 29536.209, Z_{\text{尾}} = -3.083$$

在该里程上盾尾中心的设计三维坐标为:

$$X_{\text{尾}} = 45336.282, Y_{\text{尾}} = 29536.192, Z_{\text{尾}} = -3.055$$

$\Delta X = -2\text{mm}, \Delta Y = 17\text{mm}$, 盾尾中心左右偏差 = $+\sqrt{(-2)^2 + (17)^2} = +17\text{mm}$ (正号表示偏右); $\Delta Z = -28\text{mm}$, 盾尾中心上下偏差 = -28mm (负号表示偏下)。

盾构机的坡度 = $(-2.975 + 3.083) / 4.34 = +25\%$

从以上数据可以得知, 在与对应里程上盾首中心和盾尾

中心设计的三维坐标比较后, 就可以得出盾构机轴线与设计轴线的左右偏差值和上下偏差值, 以及盾构机的坡度, 这就是盾构机的姿态。

把计算得出的盾构机姿态与自动导向系统在计算机屏幕上显示的姿态作比较, 据我们的实践经验, 只要两者的差值不大于 10mm, 就可以认为自动导向系统是正确的。

5 结束语

在南京地铁一号线中, 张府园~三山街区间隧道分为上行线和下行线两条互相平行的线路, 即往返两条隧道。在这两个区间段的实际应用中, 曾多次采用棱镜法检核盾构机姿态, 两者的偏差值较差均不大于 10mm, 证明了该方法在检核自动导向系统的正确性是可靠有效的。

在贯通测量中, 由于采用了以上一系列的方法和措施, 以及先进的自动导向系统指导推进, 上行线于 2002 年 9 月准确贯通, 经甲方检测, 平面贯通误差为 18mm, 高程贯通误差为 2mm; 下行线于 12 月准确贯通, 平面贯通误差为 20mm, 高程贯通误差为 3mm, 均能很好的满足贯通误差不大于 50mm 的要求。

参 考 文 献

- [1] 李青岳. 工程测量学. 北京: 测绘出版社, 1984.
- [2] 王兆祥等. 铁路工程测量. 北京: 测绘出版社, 1988.
- [3] 中华人民共和国国家标准. 地下铁道、轻轨交通工程测量规范 GB50308-1999. 北京: 中国计划出版社, 2000.