

基于 Helmert 变换的 GPS 动力学轨道平滑

陈俊平^{1,2} 王解先^{1,3}

(1 同济大学测量与国土信息工程系, 上海市四平路 1239 号 200092)

(2 德国地球科学研究中心, 波茨坦 14473)

(3 现代工程测量国家测绘局重点实验室, 上海市四平路 1239 号, 200092)

摘要:从卫星的运动方程出发, 提出了基于 Helmert 变换的动力学轨道平滑的方法。首先基于卫星运动方程得出在给定初始状态下的动力学积分轨道, 然后在精密星历采样时刻建立动力学积分轨道与精密星历之间的 Helmert 变换模型, 从而实现动力学轨道平滑。计算结果表明, 该算法得到的动力学平滑轨道具有与 IGS 精密星历相当的精度。

关键词:精密点定位; IGS 精密星历; 轨道拟合; Helmert 变换

中图法分类号: P228.41

精密点定位 (precise point positioning, PPP)是在 GPS 产品精度提高的前提下快速发展起来的, GPS 产品的质量将决定精密点定位 (PPP)的精度。IGS 提供的最终 GPS 精密星历的采样率为 15 min, 远大于常用的观测数据采样率 (30 s), 因而需要采用一定的算法得到观测时刻 GPS 卫星的轨道。目前, 很多基于内插原理的算法如切比雪夫多项式^[1,2]、Lagrange 插值、Newton 多项式插值、滑动式内插³等被提出来了。大量文献显示, 这些算法在精密星历采样的历元吻合较好, 但都没有考虑卫星运动的动力学特性。基于此, 本文提出了基于 Helmert 变换的动力学轨道平滑方法。

1 动力学轨道积分

卫星运动遵从牛顿定律, 从牛顿定律出发, 卫星运动方程可以表示为:

$$\ddot{\vec{r}} = -GM \frac{\vec{r}}{r^3} + a(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, p_1, p_2, \dots) = f(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, p_1, p_2, \dots) \quad (1)$$

式中, GM 为万有引力常数; $\ddot{\vec{r}}$ 为卫星运动加速度矢量; \vec{r} 为卫星在给定坐标系中的位置矢量; $r =$

$|\vec{r}|$ 为半径。第一项为地球对卫星的引力引起的加速度 a , 表示其他摄动力引起的卫星加速度, 包括地球重力场、日月引力、地球固体潮等; 参数 p_1, p_2 等表示摄动力参数, 对于 GPS 卫星, 一般只包括太阳光压参数, 这些参数一般作为未知参数进行估计。

将式(1)以及卫星轨道的初始状态写为:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, t) \\ x|_{t_0} = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

其中, x_0 为卫星的初始状态, 包括初始历元的卫星位置 r_0 、速度 \dot{r}_0 、动力参数 p_0 。对卫星运动方程在确定的初始状态下进行数值积分, 可得到卫星参考轨道 x^* 。

对式(2)在 x^* 处进行泰勒级数展开, 令 $\delta = x - x^*$, 则有:

$$\dot{\delta} = \left. \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x^*} \delta \quad (3)$$

设式(3)的解为:

$$\delta = \Psi(t, t_0) \delta_0 \quad (4)$$

$$\delta_0 = x_0^* - x_0 \quad (5)$$

则有:

$$\begin{cases} \Psi(t, t_0) = \frac{\partial F}{\partial x} \Psi(t, t_0) \\ \Psi(t_0, t_0) = I \end{cases} \quad (6)$$

其中, I 为单位矩阵; $\Psi(t, t_0)$ 被称为状态转移矩阵。

式(4)表示了初始历元轨道参数的改正数与任意历元轨道参数改正数之间的转换关系。动力学定轨中, 一般对式(2)、式(4)同时积分, 并且通过状态转移矩阵在观测方程中对轨道初始状态的改正值进行估计。

2 基于 Helmert 变换的动力学轨道平滑

动力学轨道积分得到的轨道依赖于两方面, 一是卫星的初始状态, 一是卫星的运动方程。目前, GPS 卫星运动方程中的各种摄动力模型的精度已经得到了极大的提高。根据文献[4], 采用现有的力模型, 外推 3 d 的积分轨道精度能够优于 1 mm, 从而动力学积分轨道的主要影响因素为卫星初始状态。初始状态的误差表现在积分时刻动力学积分轨道中, 可以认为其与卫星的实际轨道(精密星历轨道)存在 Helmert 变换。在地固系中, 对任意时刻 t_i 的精密星历轨道与动力积分轨道建立 Helmert 变换:

$$\begin{pmatrix} X_k^i \\ Y_k^i \\ Z_k^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} + (1 + K) \mathbf{R}_1(\alpha) \mathbf{R}_2(\beta) \mathbf{R}_3(\gamma) \begin{pmatrix} X_T^i \\ Y_T^i \\ Z_T^i \end{pmatrix} \quad (7)$$

式中, (X_k^i, Y_k^i, Z_k^i) 为精密星历轨道; (X_T^i, Y_T^i, Z_T^i) 为由轨道积分得出的动力学轨道; $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \alpha, \beta, \gamma, K$ 为 Helmert 变换参数。轨道积分得到的动力学积分轨道是在惯性系下定义的, (X_T^i, Y_T^i, Z_T^i) 表示为^[9]:

$$\begin{pmatrix} X_T^i \\ Y_T^i \\ Z_T^i \end{pmatrix} = \mathbf{Q}(t_i) \mathbf{R}(t_i) \mathbf{W}(t_i) \begin{pmatrix} X^i \\ Y^i \\ Z^i \end{pmatrix} \quad (8)$$

式中, (X^i, Y^i, Z^i) 为 t_i 时刻惯性系中卫星的动力学积分轨道; $\mathbf{Q}(t_i), \mathbf{R}(t_i), \mathbf{W}(t_i)$ 分别为该时刻的岁差-章动、自转、极移矩阵。

将式(8)代入式(7), 得:

$$r_k^i = \Delta T + (1 + K) \mathbf{R}_1 \circ \mathbf{R}_2 \circ r_T^i \quad (9)$$

式中, r_k^i, r_T^i 分别为精密星历轨道以及动力学积分轨道; $\Delta T, K$ 代表相似变换中的平移参数以及尺度参数; $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ 分别代表 Helmert 变换以及参考系变换的旋转矩阵(包含地球自转参数)。

对式(9)进行泰勒级数展开, 得:

$$r_k^i = r_{k,0}^i + \frac{\partial r_k^i}{\partial x} dx \quad (10)$$

其中, $r_{k,0}^i$ 为利用初值根据式(9)求得的值。 t_i 时刻, 式(10)中待求参数的改正数写为:

$$dv = (dHel, dR_2, dr^i)^T \quad (11)$$

$$dHel = d(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \alpha, \beta, \gamma, K)^T \quad (12)$$

$$dR_2 = (X_p, Y_p, UT_1, X_p, Y_p, UT_1)^T \quad (13)$$

其中, $dHel$ 为 Helmert 变换参数; dR_2 为参考系变换的参数的改正数, 包括极移 X_p, Y_p 及其变化率 X_p, Y_p 、时间变化及其变化率 UT_1, UT_1 ; dr^i 为 t_i 时刻动力学积分轨道的改正数。 dr^i 可以表示为:

$$dr^i = \Psi(t_i, t_0) dr_0 \quad (14)$$

此时, dr_0 为轨道积分初始状态的改正数。 从而在式(11)中, 待求参数可以重新写为:

$$dx = (dHel, dR_2, dr_0)^T \quad (15)$$

对应于式(15), 式(10)中的偏导数 $\partial r_k^i / \partial x$ 写为:

$$A_i = \frac{\partial r_k^i}{\partial x} = \left[\frac{\partial r_k^i}{\partial Hel}, \frac{\partial r_k^i}{\partial R_2}, \frac{\partial r_k^i}{\partial r_0} \circ \Psi(t_i, t_0) \right] \quad (16)$$

基于式(10), 对于精密星历 N_{obs} 个(一般为 96 个)观测历元, $3N_{obs}$ 个观测方程的系数阵 A 以及残差阵 L 可以写为:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_{N_{obs}} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_{N_{obs}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_k^1 - r_{k,0}^1 \\ r_k^2 - r_{k,0}^2 \\ \dots \\ r_k^{N_{obs}} - r_{k,0}^{N_{obs}} \end{pmatrix} \quad (17)$$

从而观测方程可以写为:

$$A dx = L \quad (18)$$

法方程为:

$$N dx = b \quad (19)$$

式中,

$$N = A^T A, b = A^T L \quad (20)$$

按照最小二乘原理, 所有观测历元的法方程等价于单个历元法方程的叠加, 也即式(20)可以表示为 N_{obs} 个观测历元各自法方程的叠加:

$$N = \sum_{i=1}^{N_{obs}} (A_i^T A_i), b = \sum_{i=1}^{N_{obs}} A_i^T L_i \quad (21)$$

利用最小二乘迭代, 就能够得到轨道初始状态的改正数 $(\delta r_0, \delta v_0, \delta p_0)$ 。 利用新的卫星初始状态重新进行动力学轨道积分, 得到动力学平滑轨道。

3 数据处理

基于以上模型, 对 2005 年 DOY062 天 GPS 轨道进行了计算。 数据处理的主要参数如下: 积分步长为 9.375 s, 轨道输出时间间隔为 15 min,

估计参数为轨道初始状态改正数(坐标、速度、9个太阳光压参数);初始轨道以GPST 12:00为初始历元,坐标基于SP3精密星历,速度由SP3精密星历内插获得;动力学轨道从初始历元分别往前、后各积分12h。采用的卫星动力学模型包括重力场、固体潮、太阳、月亮引力以及太阳光压。地球自转参数采用了IGS综合解的结果。

通过不同参数设置的情况,首先对模型参数进行分析。表1列出了不同参数设置的情况。图1列出了GPS卫星PRN01在不同参数设置情况下轨道平滑的中误差。其中,在第7种参数设置的情况下,轨道平滑的解发散;第8种情况下,三维中误差达到85.3m,这是由于模型中参数 R_1 、 R_2 之间存在很强的相关性,如何同时求解这两种参数需要进一步研究。同时也发现,估计地球自转参数的第4、第6种参数设置情况下,轨道的精度最高。

表1 不同参数设置

Tab. 1 Parameter Settings

	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 4	Ex. 5	Ex. 6	Ex. 7	Ex. 8
ΔT		×			×	×		×
R_1			×		×		×	×
R_2				×		×	×	×

注:×表明模型中对该参数进行估计。

将平滑轨道与SP3星历进行对比,图2给出了在第2种参数设置下,GPS卫星PRN01动力学平滑轨道与精密星历SP3轨道的差别。对所有的GPS卫星在该天的动力学平滑轨道进行统

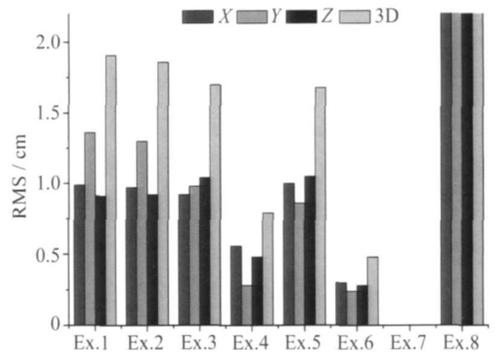


图1 轨道平滑中误差统计

Fig. 1 Statistics of RMS of Orbit Smoothing

计,图3给出了所有卫星动力学平滑轨道与精密星历差值平均值的绝对值,图4给出了每颗卫星动力学平滑轨道与精密星历差值的中误差,图5表示每颗卫星轨道三维差值的平均值。

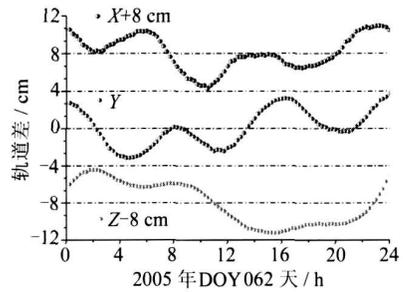


图2 动力学平滑轨道与IGS精密星历的比较

g. 2 Orbit Difference Between Dynamicsmoothing Orbits and IGS Orbits

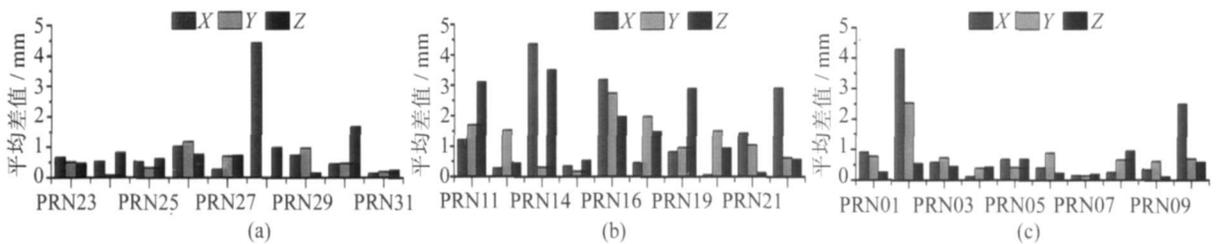


图3 动力学平滑轨道与IGS精密星历的差值平均值的绝对值

Fig. 3 Average Difference Between Dynamicsmoothing Orbits and IGS Orbits

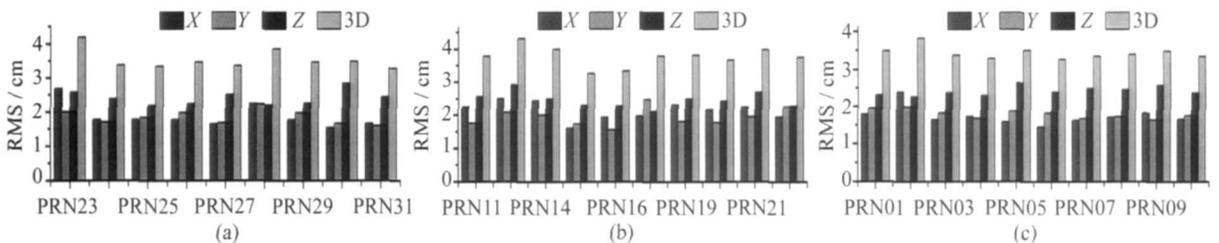


图4 动力学平滑轨道与IGS精密星历差值的中误差

Fig. 4 RMS of the Difference Between Dynamicsmoothing Orbits and IGS Orbits

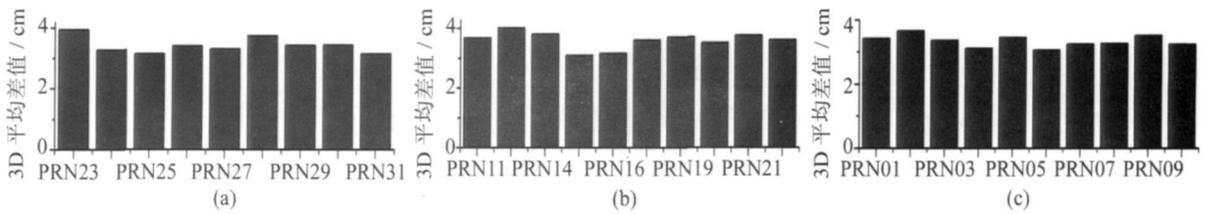


图 5 动力学平滑轨道与 IGS 精密星历三维距离差的平均值

Fig. 5 Average of 3D Difference Between Dynamicsmoothing Orbits and IGS Orbits

从图 2 可以看到, 动力学平滑轨道与 IGS 精密星历的差值相当平缓, 差值最大值约为 4 cm。从积分原点(12:00)出发, 可以发现, 差值在前、后 12 h 基本上各自形成一个与该卫星运动相一致的周期。卫星运动的动力学方程保证了任意积分历元与实际轨道的差值将在该周期内平缓变化。从图 3 可以看到, 对于卫星动力学平滑轨道与 IGS 精密星历差值平均值的绝对值, 对绝大部分卫星, 该指标小于 2 mm, 这表明该动力学平滑轨道与 IGS 精密星历的参考框架符合较好。

图 4 结果表明, 三个分量上差值的中误差都小于 3 cm, 3D 中误差小于 4 cm, 这与 IGS 精密轨道标称精度(5 cm)相当, 说明利用本文得到的动力学平滑轨道具有与精密星历相当的精度。将采样历元的轨道差值转化成 3D 距离差, 从图 5 中可看到, 所有卫星 3D 距离差的平均值都小于 4 cm。

第 3 到第 6 种参数设置的情况与以上统计结果类似。所有统计结果表明, 基于卫星运动方程的轨道平滑模型解决了常用拟合方法存在的问

题, 取得了较好的结果。

参 考 文 献

- [1] 余鹏, 孙学金, 赵世军. GPS 定位中卫星坐标计算的切比雪夫多项式拟合法[J]. 气象科技, 2004, 32(3): 198
- [2] 孔巧丽. 用切贝雪夫多项式拟合 GPS 卫星精密坐标[J]. 测绘通报, 2006(8): 1-3
- [3] 洪樱, 欧吉坤, 彭碧波. GPS 卫星精密星历和钟差三种内插方法的比较[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2006, 31(6): 516-518, 556
- [4] Hugentobler U, Dach R, Fridez P, et al. Bernese GPS Software(Ver. 5.0) [M]. Bern: Printing Office of the University of Bern, 2006
- [5] McCarthy D D, Petit G. IERS Conventions (2003) (IERS Technical Note No. 32)[M]. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2004

第一作者简介: 陈俊平, 博士。现从事大地测量理论与应用研究。
E-mail: sunnpa@163.com

GPS Dynamic Satellite Orbit Smoothing Based on Helmert Transformation

CHEN Junping^{1,2} WANG Jiexian^{1,3}

(1 Department of Surveying and Geomatics, Tongji University, 1239 Siping Road, Shanghai 200092, China)

(2 GFZ Potsdam, Telegrafenberg A17, Potsdam 14473, Germany)

(3 Key Laboratory of Modern Engineering Surveying, State Bureau of Surveying and Mapping, 1239 Siping Road, Shanghai 200092, China)

Abstract: A dynamic approach is developed, which is based on the motion equation of GPS, to produce the high frequency GPS orbits. The method fits dynamic-integrated orbits to precise orbits at the sampling epoch. A model based on Helmert transformation is introduced. Results show that the fitted orbits have a same precision of IGS SP3 orbits.

Key words: precise point positioning; IGS orbits; orbit fitting; Helmert transformation