



# 大地测量计算机代数分析

---

海军工程大学 边少锋 李厚朴

2022年09月16, 上海

# 汇报人基本情况



- 海军工程大学导航工程系教授
- 1992原武汉测绘科技大学博士研究生毕业，师从宁津生教授
- 1995年德国洪堡奖学金获得者，师从国际知名大地测量学家Grafarend教授
- 2001年国家杰出青年科学基金获得者
- 曾任国家自然科学基金地球科学部会评专家，信息学部会评专家

# 汇报提纲

---

**一、应用背景**

**二、研究目标与研究内容**

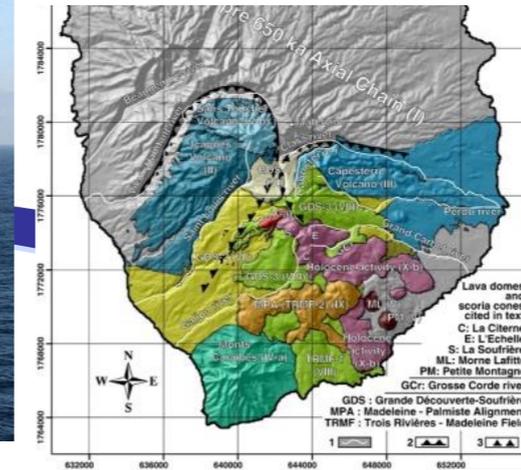
**三、新书内容推介**

**四、特色与创新之处**

# 一、应用背景

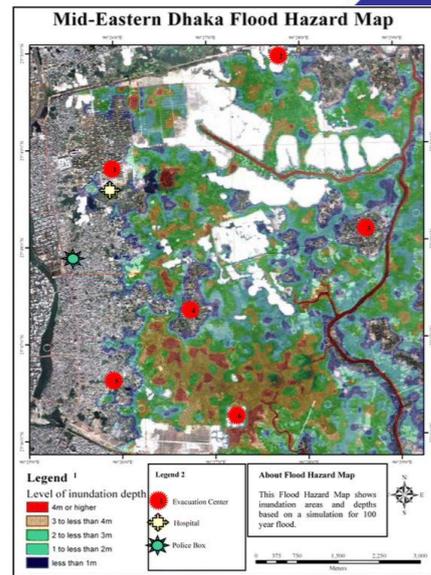
大地测量在国民经济建设、国防建设、地球科学等方面有广泛的用途

军事国防



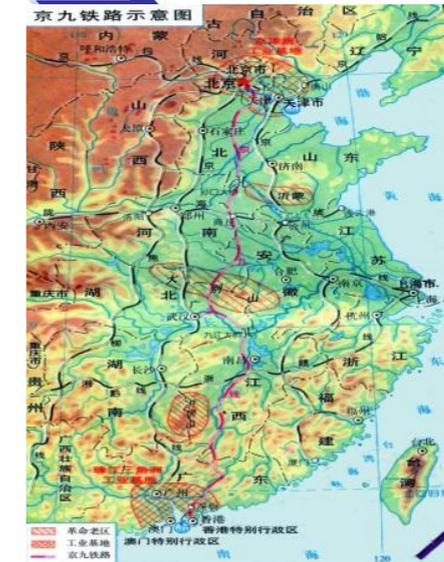
火山地震

水文气象

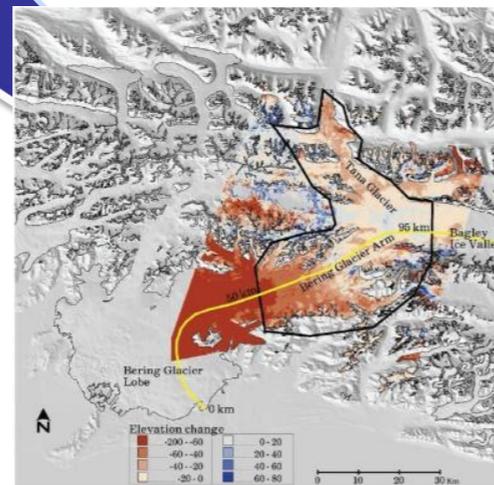


大地测量

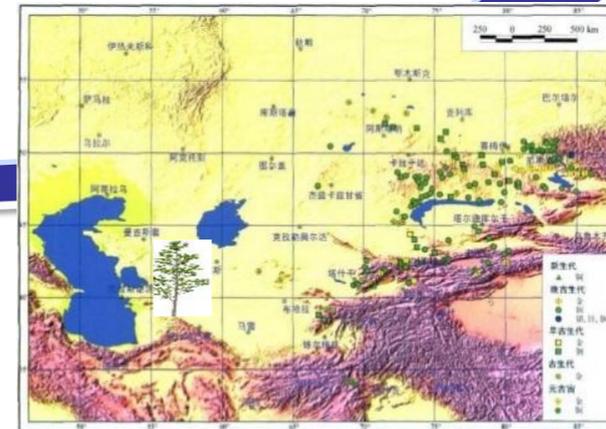
工程建设



地质冰川



资源勘察



# 一、应用背景

大地测量涉及大量复杂繁琐的数学分析过程：

- 椭圆函数幂级数展开

$$X = \int_0^B M dB = a(1 - e^2) \int_0^B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} dB$$

- 隐函数复合函数微分

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(B, e) = \mathcal{G}(B, 0) + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial e} \Big|_{e=0} e + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial e^2} \Big|_{e=0} e^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \mathcal{G}}{\partial e^3} \Big|_{e=0} e^3 + \dots + \frac{1}{8!} \frac{\partial^8 \mathcal{G}}{\partial e^8} \Big|_{e=0} e^8 + \dots$$

- 质体引力积分

$$F = G\rho X \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{1 + e'^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda} d\varphi d\lambda$$

- 摄动函数展开

$$G_{lpq}(e) = X_{l-2p+q}^{-l-1, l-2p}(e)$$

- 微分方程数值解法

- .....



# 一、应用背景

---

限于当时的历史条件和分析手段，老一辈大地测量学家在解决这些问题时，主要由**人工推导**完成，存在以下缺陷：

- 导出的公式繁琐冗长，**计算效率不高**
- 包含复杂的迭代计算，**理论分析不甚方便**
- 近似处理会导致一些**偏差**，**计算精度不高**
- 部分公式以**具体的数值形式**给出，**缺乏普适性**
- **可视化手段比较弱**，**未引起足够的重视**

**许多问题依靠人工推导解决得绝非完美或者根本无法实现！  
年青一代应该有信心对现有教科书理论或公式提出质疑！**

# 一、应用背景

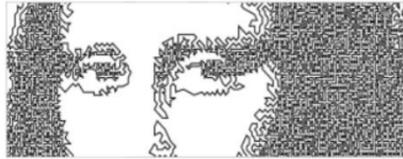
---

- 计算机代数的出现，为这些问题的解决提供了绝佳的手段。

- 计算机代数的特点是能够借助计算机代替人工进行符号的数学推演。

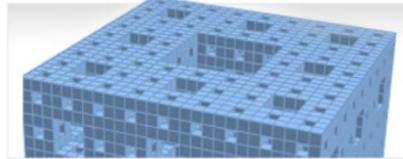
- 可以使数学分析的效率得到空前的提高，可视化变得非常方便。

# 一、应用背景



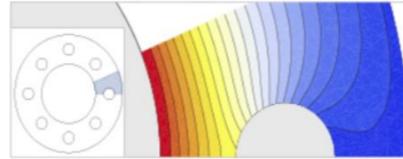
## 数学结构

- 较大级别和扩展代数»
- 正式数学算符»
- 量纲变量»
- 增强的图计算»



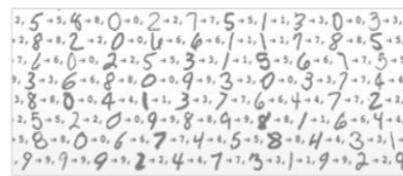
## 几何计算 新功能

- 符号式几何»
- 已命名和公式区域»
- 基于网格的区域»



## 微分方程求解

- 偏微分方程 (PDE) 和有限元»
- 符号式延迟微分方程 (DDE)»
- 混合微分方程»



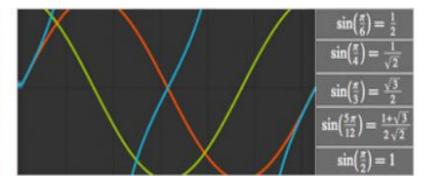
## 机器学习 新功能

- 高度自动化的机器学习»
- 内置分类器集合»
- 自动时间序列分析»



## 结构化语义数据

- 语义数据导入»
- 与领域有关的语言解释»
- 数据集查询框架»



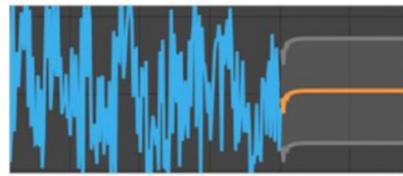
## 核心语言增强

- 键值关联性数组»
- 增强的函数式编程»
- 符号式程序操作»



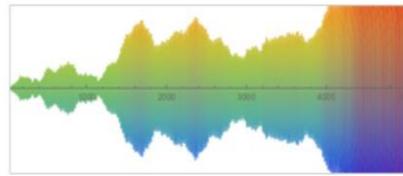
## 地理计算 新功能

- 地理可视化»
- 与地理有关的属性»
- 基于实体的地理计算»



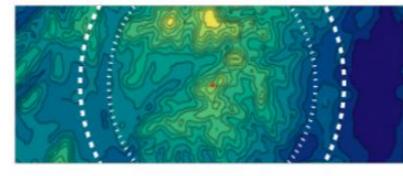
## 时间的相关计算

- 符号式日期和时间»
- 时间序列处理»



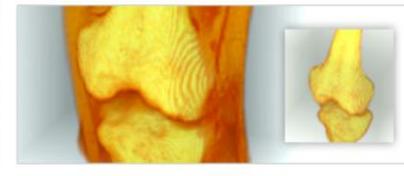
## 随机过程分析

- 隐式马尔可夫过程等等»
- 随机时间序列»



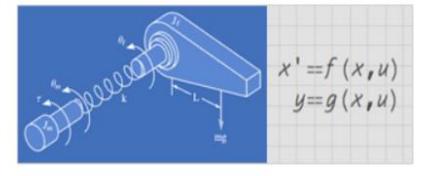
## 可视化和图形

- 基于主题的样式化»
- 新的可视化类别»
- 地理可视化»



## 图像处理

- 更多二维图像处理功能»
- 更多三维图像处理功能»
- 扩展的颜色支持»

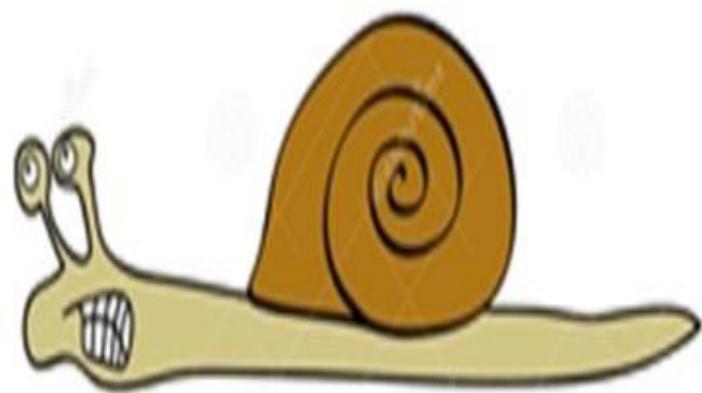


## 工程计算

- 偏微分方程和有限元»
- 非线性控制系统»
- 增强的信号处理»

计算机代数系统无与伦比的符号运算和可视化分析能力为大地测量理论推导和可视化分析提供了强有力的支持!

# 一、应用背景



人工推导



计算机代数推导

# 一、应用背景

## 等角纬度正解展开式

$$\varphi = B + \alpha \sin 2B + \beta \sin 4B + \gamma \sin 6B + \delta \sin 8B + \dots$$

前辈杨启和推导的系数

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2}e^2 - \frac{5}{24}e^4 - \frac{3}{32}e^6 - \frac{1399}{53760}e^8 \\ \beta = \frac{5}{48}e^4 + \frac{7}{80}e^6 + \frac{689}{17920}e^8 \\ \gamma = -\frac{13}{480}e^6 - \frac{1363}{53760}e^8 \\ \delta = \frac{677}{107520}e^8 \end{cases}$$

计算机代数推导的系数

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2}e^2 - \frac{5}{24}e^4 - \frac{3}{32}e^6 - \frac{281}{5760}e^8 \\ \beta = \frac{5}{48}e^4 + \frac{7}{80}e^6 + \frac{697}{11520}e^8 \\ \gamma = -\frac{13}{480}e^6 - \frac{461}{13440}e^8 \\ \delta = \frac{1237}{161280}e^8 \end{cases}$$

# 一、应用背景

## 等角纬度反解展开式

$$B = \varphi + B_2 \sin 2\varphi + B_4 \sin 4\varphi + B_6 \sin 6\varphi + B_8 \sin 8\varphi$$

	克拉索夫斯基椭球	新椭球
$\varphi$	$2\arctg(e^a) - \pi/2$	$2\arctg(e^a) - \pi/2$
$e$	2.718281828	2.718281828
$B_2$	$0.33560695588 \times 10^{-2}$	$0.33565539449 \times 10^{-2}$
$B_4$	$0.65700353 \times 10^{-5}$	$0.6571932 \times 10^{-5}$
$B_6$	$0.176221 \times 10^{-7}$	$0.176297 \times 10^{-7}$
$B_8$	$0.608 \times 10^{-10}$	$0.608 \times 10^{-10}$

传统的数值形式

$$B = \varphi + \alpha \sin 2\varphi + \beta \sin 4\varphi + \gamma \sin 6\varphi + \delta \sin 8\varphi$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}e^2 + \frac{5}{24}e^4 + \frac{1}{12}e^6 + \frac{13}{360}e^8 \\ \beta = \frac{7}{48}e^4 + \frac{29}{240}e^6 + \frac{811}{11520}e^8 \\ \gamma = \frac{7}{120}e^6 + \frac{81}{1120}e^8 \\ \delta = \frac{4279}{161280}e^8 \end{cases}$$

计算机代数推导的符号型公式

# 几何大地测量

## 地球椭球常用纬度间的正反解变换

各类纬度正反解公式精度  
分析

纬度	传统公式精度	本项目公式精度	精度提高量级
归化纬度	$10^{-6}''$	$10^{-9}''$	3
地心纬度	$10^{-5}''$	$10^{-8}''$	3
等距离纬度正解	$10^{-5}''$	$10^{-7}''$	2
等角纬度正解	$10^{-4}''$	$10^{-8}''$	4
等面积纬度正解	$10^{-4}''$	$10^{-8}''$	4
等距离纬度反解	$10^{-4}''$	$10^{-8}''$	4
等角纬度反解	$10^{-4}''$	$10^{-8}''$	4
等面积纬度反解	$10^{-4}''$	$10^{-8}''$	4

最少提高2个数量级，最多提高4个数量级！

# 一、应用背景

- 等面积纬度

$$\mathcal{G} = \arcsin \left[ \frac{1}{A} \left( \frac{\sin B}{2(1 - e^2 \sin^2 B)} + \frac{1}{4e} \ln \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right) \right]$$

- 级数展开式为

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(B, e) = \mathcal{G}(B, 0) + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial e} \Big|_{e=0} e + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial e^2} \Big|_{e=0} e^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \mathcal{G}}{\partial e^3} \Big|_{e=0} e^3 + \dots + \frac{1}{8!} \frac{\partial^8 \mathcal{G}}{\partial e^8} \Big|_{e=0} e^8 + \dots$$

# 一、应用背景

等面积纬度反解 (展开至10阶) -- 幂级数法.nb \*

$$\text{Out}[5] = -A + A^2 - 4A^3 e^2$$

$$\text{In}[6] = f_3 = \text{TrigReduce}[(D[f_2, B] f + D[f_2, \varphi]) / \text{Cos}[\varphi]]:$$

$$\text{In}[7] = c_3 = f_3 / . B \rightarrow 0 / . \varphi \rightarrow 0$$

$$\text{Out}[7] = 0$$

$$\text{In}[8] = f_4 = \text{TrigReduce}[(D[f_3, B] f + D[f_3, \varphi]) / \text{Cos}[\varphi]]:$$

$$\text{In}[9] = c_4 = f_4 / . B \rightarrow 0 / . \varphi \rightarrow 0$$

$$\text{Out}[9] = -3A - 6A^3 + 9A^5 + 24A^3 e^2 - 40A^5 e^2 + 88A^5 e^4$$

$$\text{In}[10] = f_5 = \text{TrigReduce}[(D[f_4, B] f + D[f_4, \varphi]) / \text{Cos}[\varphi]]:$$

$$\text{In}[11] = c_5 = f_5 / . B \rightarrow 0 / . \varphi \rightarrow 0$$

$$\text{Out}[11] = 0$$

$$\text{In}[12] = f_6 = \text{TrigReduce}[(D[f_5, B] f + D[f_5, \varphi]) / \text{Cos}[\varphi]]:$$

$$\text{Sec}[\varphi] \left( -5A^7 e^2 \text{Sec}[B]^7 + \frac{259}{4} A^7 e^4 \text{Sec}[B]^7 - \frac{4019}{4} A^7 e^6 \text{Sec}[B]^7 + \frac{180917}{32} A^7 e^8 \text{Sec}[B]^7 - \frac{2508081}{128} A^7 e^{10} \text{Sec}[B]^7 + \frac{23646861}{512} A^7 e^{12} \text{Sec}[B]^7 - \frac{19845153}{256} A^7 e^{14} \text{Sec}[B]^7 + \frac{388125639 A^7 e^{16} \text{Sec}[B]^7}{4096} - \frac{2782228449 A^7 e^{18} \text{Sec}[B]^7}{32768} + \frac{7252871483 A^7 e^{20} \text{Sec}[B]^7}{131072} - \frac{3352821277 A^7 e^{22} \text{Sec}[B]^7}{131072} \right. \\ \left. + \frac{8349690505 A^7 e^{24} \text{Sec}[B]^7}{1048576} - \frac{6287259923 A^7 e^{26} \text{Sec}[B]^7}{4194304} + \frac{2165516355 A^7 e^{28} \text{Sec}[B]^7}{16777216} + \frac{7}{4} A^7 \text{Sec}[B]^9 + \frac{1309}{8} A^7 e^2 \text{Sec}[B]^9 - \frac{64287}{32} A^7 e^4 \text{Sec}[B]^9 + \frac{857425}{64} A^7 e^6 \text{Sec}[B]^9 - \frac{28052255}{512} A^7 e^8 \text{Sec}[B]^9 + \frac{154537383 A^7 e^{10} \text{Sec}[B]^9}{1024} - \frac{1210730103 A^7 e^{12} \text{Sec}[B]^9}{4096} + \right. \\ \left. + \frac{3476461527 A^7 e^{14} \text{Sec}[B]^9}{8192} - \frac{59383589265 A^7 e^{16} \text{Sec}[B]^9}{131072} + \frac{94437422365 A^7 e^{18} \text{Sec}[B]^9}{262144} - \frac{221224493347 A^7 e^{20} \text{Sec}[B]^9}{1048576} + \frac{185676668541 A^7 e^{22} \text{Sec}[B]^9}{2097152} - \frac{423320113601 A^7 e^{24} \text{Sec}[B]^9}{16777216} + \frac{146945954305 A^7 e^{26} \text{Sec}[B]^9}{33554432} - \frac{46947008325 A^7 e^{28} \text{Sec}[B]^9}{13421728} - \frac{1575}{8} A^7 \text{Sec}[B]^{11} + \right. \\ \left. + \frac{9045}{4} A^7 e^2 \text{Sec}[B]^{11} - \frac{1808175}{128} A^7 e^4 \text{Sec}[B]^{11} + \frac{114345}{2} A^7 e^6 \text{Sec}[B]^{11} - \frac{165956175 A^7 e^8 \text{Sec}[B]^{11}}{1024} + \frac{172198125}{512} A^7 e^{10} \text{Sec}[B]^{11} - \frac{17182280115 A^7 e^{12} \text{Sec}[B]^{11}}{32768} + \frac{1275191775 A^7 e^{14} \text{Sec}[B]^{11}}{2048} - \frac{148207580235 A^7 e^{16} \text{Sec}[B]^{11}}{262144} + \frac{51183185625 A^7 e^{18} \text{Sec}[B]^{11}}{131072} - \right. \\ \left. + \frac{847001180025 A^7 e^{20} \text{Sec}[B]^{11}}{4194304} + \frac{19876326645 A^7 e^{22} \text{Sec}[B]^{11}}{262144} - \frac{655680754125 A^7 e^{24} \text{Sec}[B]^{11}}{33554432} + \frac{51915894975 A^7 e^{26} \text{Sec}[B]^{11}}{16777216} - \frac{487893074625 A^7 e^{28} \text{Sec}[B]^{11}}{2147483648} + \frac{51975}{32} A^7 \text{Sec}[B]^{13} - \frac{2546775}{128} A^7 e^2 \text{Sec}[B]^{13} + \frac{59594535}{512} A^7 e^4 \text{Sec}[B]^{13} - \frac{218513295}{512} A^7 e^6 \text{Sec}[B]^{13} + \right. \\ \left. + \frac{4463914455 A^7 e^8 \text{Sec}[B]^{13}}{4096} - \frac{66958716825 A^7 e^{10} \text{Sec}[B]^{13}}{32768} + \frac{379432728675 A^7 e^{12} \text{Sec}[B]^{13}}{131072} - \frac{205977766995 A^7 e^{14} \text{Sec}[B]^{13}}{65536} + \frac{2752611977115 A^7 e^{16} \text{Sec}[B]^{13}}{1048576} - \frac{7034452830405 A^7 e^{18} \text{Sec}[B]^{13}}{4194304} + \frac{13527793904625 A^7 e^{20} \text{Sec}[B]^{13}}{16777216} - \frac{4743512148375 A^7 e^{22} \text{Sec}[B]^{13}}{16777216} + \right. \\ \left. + \frac{9170790153525 A^7 e^{24} \text{Sec}[B]^{13}}{13421728} - \frac{21868807289175 A^7 e^{26} \text{Sec}[B]^{13}}{2147483648} + \frac{6064459164225 A^7 e^{28} \text{Sec}[B]^{13}}{8589934592} - 20A^5 e^4 \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^2 + 80A^5 e^6 \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^2 - \frac{905}{4} A^5 e^8 \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^2 + \frac{1595}{4} A^5 e^{10} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^2 - \frac{14525}{32} A^5 e^{12} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^2 + \right. \\ \left. + \frac{5385}{16} A^5 e^{14} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^2 - \frac{161535 A^5 e^{16} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^2}{1024} + \frac{43615 A^5 e^{18} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^2}{1024} - \frac{20735 A^5 e^{20} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^2}{4096} + \frac{25}{4} A^5 \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^2 - \frac{825}{8} A^5 e^2 \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^2 + \frac{22525}{32} A^5 e^4 \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^2 - \frac{77375}{32} A^5 e^6 \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^2 + \right. \\ \left. + \frac{1292375}{256} A^5 e^8 \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^2 - \frac{3546375}{512} A^5 e^{10} \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^2 + \frac{13161225 A^5 e^{12} \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^2}{2048} - \frac{32893575 A^5 e^{14} \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^2}{8192} + \frac{213016375 A^5 e^{16} \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^2}{131072} - \frac{101190375 A^5 e^{18} \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^2}{262144} + \frac{42934775 A^5 e^{20} \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^2}{1048576} - \right. \\ \left. + \frac{1575}{16} A^5 \text{Sec}[B]^9 \text{Sec}[\varphi]^2 + \frac{13125}{16} A^5 e^2 \text{Sec}[B]^9 \text{Sec}[\varphi]^2 - \frac{826875}{256} A^5 e^4 \text{Sec}[B]^9 \text{Sec}[\varphi]^2 + \frac{496125}{64} A^5 e^6 \text{Sec}[B]^9 \text{Sec}[\varphi]^2 - \frac{12733875 A^5 e^8 \text{Sec}[B]^9 \text{Sec}[\varphi]^2}{1024} + \frac{14189175 A^5 e^{10} \text{Sec}[B]^9 \text{Sec}[\varphi]^2}{1024} - \frac{354729375 A^5 e^{12} \text{Sec}[B]^9 \text{Sec}[\varphi]^2}{32768} + \frac{95720625 A^5 e^{14} \text{Sec}[B]^9 \text{Sec}[\varphi]^2}{16384} - \right. \\ \left. + \frac{1091215125 A^5 e^{16} \text{Sec}[B]^9 \text{Sec}[\varphi]^2}{524288} + \frac{231469875 A^5 e^{18} \text{Sec}[B]^9 \text{Sec}[\varphi]^2}{524288} - \frac{354920475 A^5 e^{20} \text{Sec}[B]^9 \text{Sec}[\varphi]^2}{8388608} - 30A^3 e^4 \text{Sec}[B]^3 \text{Sec}[\varphi]^4 + 60A^3 e^6 \text{Sec}[B]^3 \text{Sec}[\varphi]^4 - \frac{225}{4} A^3 e^8 \text{Sec}[B]^3 \text{Sec}[\varphi]^4 + \frac{105}{4} A^3 e^{10} \text{Sec}[B]^3 \text{Sec}[\varphi]^4 - \frac{315}{64} A^3 e^{12} \text{Sec}[B]^3 \text{Sec}[\varphi]^4 + \right. \\ \left. + \frac{45}{2} A^3 \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^4 - \frac{405}{4} A^3 e^2 \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^4 + \frac{45}{2} A^3 e^4 \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^4 + \frac{3375}{16} A^3 e^6 \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^4 - \frac{1275}{8} A^3 e^8 \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^4 - \frac{7875}{32} A^3 e^{10} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^4 + \frac{3015}{4} A^3 e^{12} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^4 + \frac{42525}{256} A^3 e^{14} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^4 - \frac{65625}{32} A^3 e^{16} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^4 - \right. \\ \left. + \frac{31185}{512} A^3 e^{18} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^4 + \frac{446145}{128} A^3 e^{20} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^4 + \frac{19305 A^3 e^{22} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^4}{2048} - \frac{1977885}{512} A^3 e^{24} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^4 + \frac{1437975}{512} A^3 e^{26} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^4 - \frac{10624185 A^3 e^{28} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^4}{8192} + \frac{22683375 A^3 e^{30} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^4}{65536} - \frac{10684245 A^3 e^{32} \text{Sec}[B]^5 \text{Sec}[\varphi]^4}{262144} - \right. \\ \left. + \frac{75}{512} A^3 \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^4 - \frac{75}{512} A^3 e^2 \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^4 + \frac{12045}{2048} A^3 e^4 \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^4 - \frac{51225}{512} A^3 e^6 \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^4 + \frac{926835}{512} A^3 e^8 \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^4 - \frac{2648205 A^3 e^{10} \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^4}{8192} + \frac{10065825 A^3 e^{12} \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^4}{65536} - \frac{25553385 A^3 e^{14} \text{Sec}[B]^7 \text{Sec}[\varphi]^4}{262144} \right)$$

8阶导数表达式达36页之巨!

# 一、应用背景

高效地解决了经典卫星定轨理论中的一些复杂的微分积分运算、幂级数展开和迭代算法问题

例如，摄动分析中常遇到以下形式的积分：

$$I_m^n = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^{2n} \theta d\theta}{(1 - e \cos \theta)^m}$$

```
Series[Table[{n, m, Integrate[ $\frac{(\text{Sin}[\theta])^{2n}}{(1 - e \text{Cos}[\theta])^m}$ , { $\theta$ , 0, 2  $\pi$ }, Assumptions  $\rightarrow 0 < e < 1$ ]}], {n, 0, 3}, {m, 0, n}], {e, 0, 8}]
```

```
{({{0, 0, 2  $\pi$ }}, {{1, 0,  $\pi$ }}, {{1, 1,  $\pi + \frac{\pi e^2}{4} + \frac{\pi e^4}{8} + \frac{5 \pi e^6}{64} + \frac{7 \pi e^8}{128} + 0[e]^9$ }}},  
{{2, 0,  $\frac{3 \pi}{4}$ }}, {{2, 1,  $\frac{3 \pi}{4} + \frac{\pi e^2}{8} + \frac{3 \pi e^4}{64} + \frac{3 \pi e^6}{128} + \frac{7 \pi e^8}{512} + 0[e]^9$ }}, {{2, 2,  $\frac{3 \pi}{4} + \frac{3 \pi e^2}{8} + \frac{15 \pi e^4}{64} + \frac{21 \pi e^6}{128} + \frac{63 \pi e^8}{512} + 0[e]^9$ }}},  
{{3, 0,  $\frac{5 \pi}{8}$ }}, {{3, 1,  $\frac{5 \pi}{8} + \frac{5 \pi e^2}{64} + \frac{3 \pi e^4}{128} + \frac{5 \pi e^6}{512} + \frac{5 \pi e^8}{1024} + 0[e]^9$ }},  
{{3, 2,  $\frac{5 \pi}{8} + \frac{15 \pi e^2}{64} + \frac{15 \pi e^4}{128} + \frac{35 \pi e^6}{512} + \frac{45 \pi e^8}{1024} + 0[e]^9$ }}, {{3, 3,  $\frac{5 \pi}{8} + \frac{15 \pi e^2}{32} + \frac{45 \pi e^4}{128} + \frac{35 \pi e^6}{128} + \frac{225 \pi e^8}{1024} + 0[e]^9$ }}}]
```

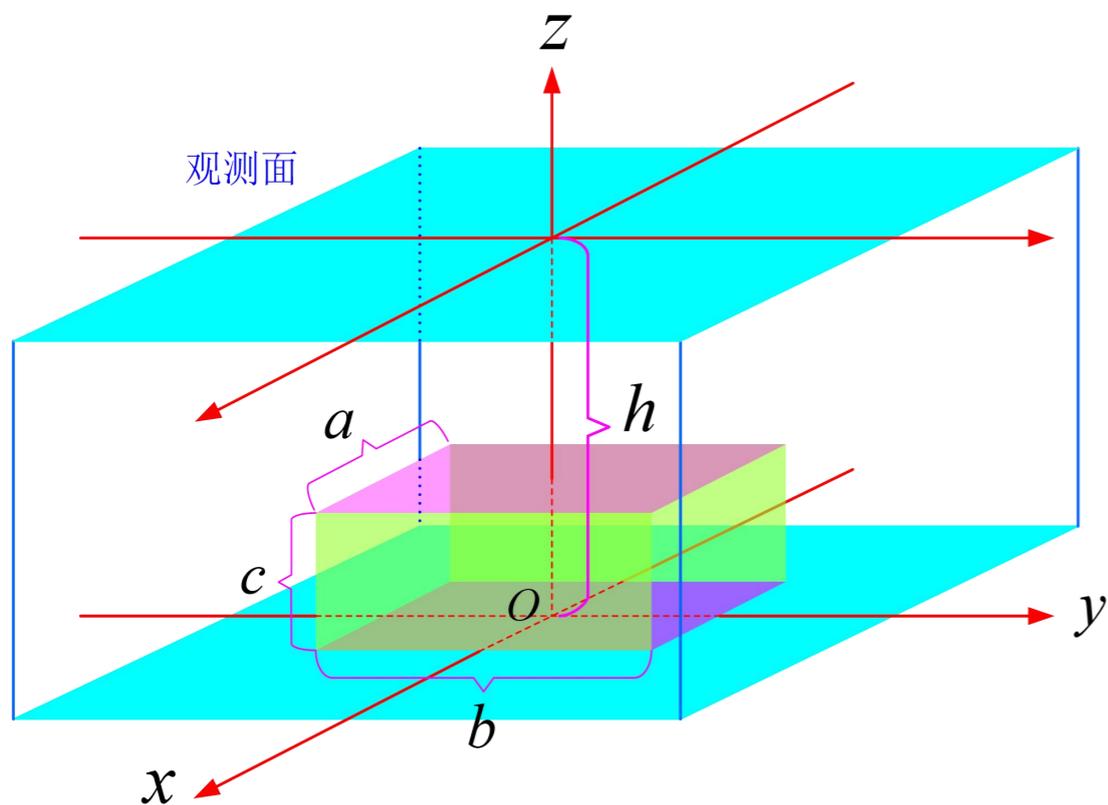
又如人造地球卫星摄动微分方程数值解 Cowell 隐式公式：

$$\begin{cases} x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = h^2 \sum_{m=0}^{n-1} \delta_m \nabla f_n^m \\ \delta_m = (-1)^m \int_{-1}^0 (-s) \left[ \binom{-s}{m} + \binom{s+2}{m} \right] ds \end{cases}$$

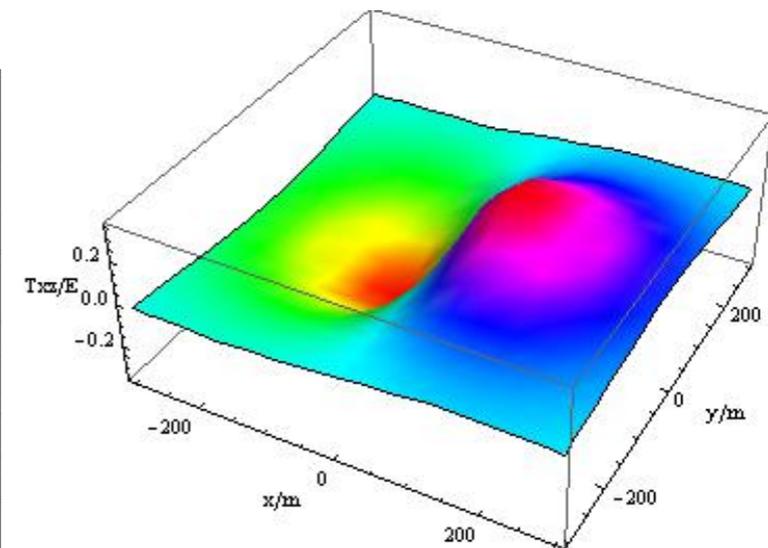
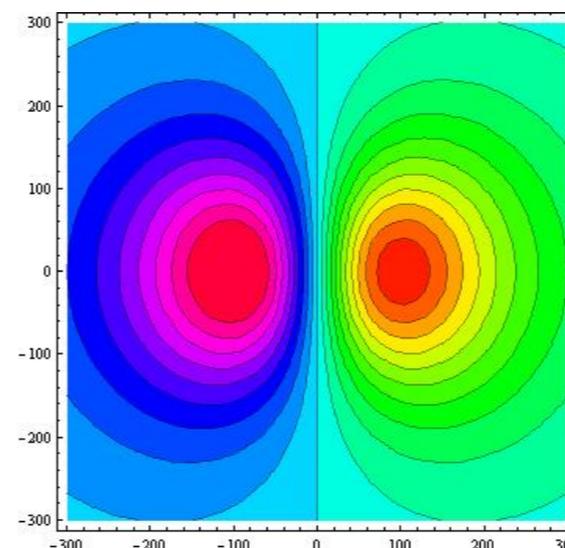
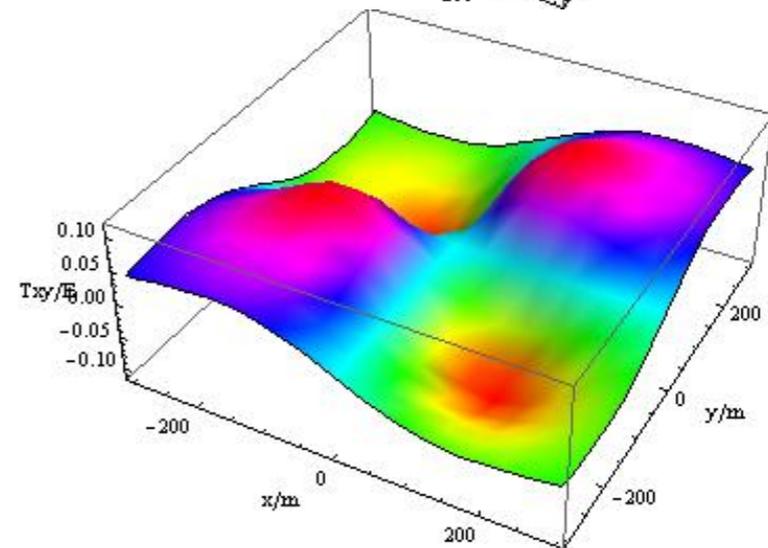
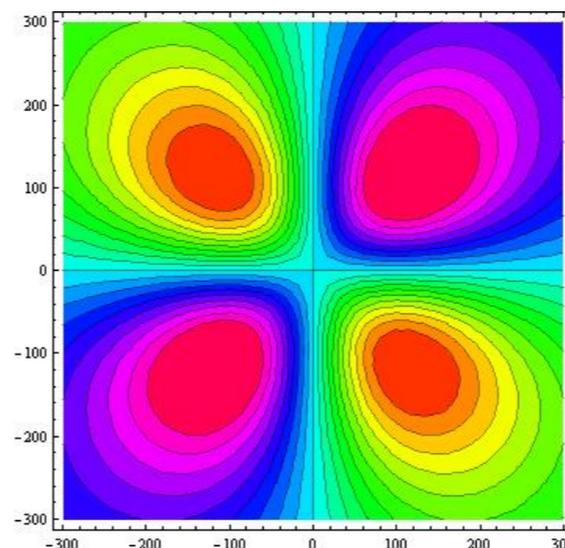
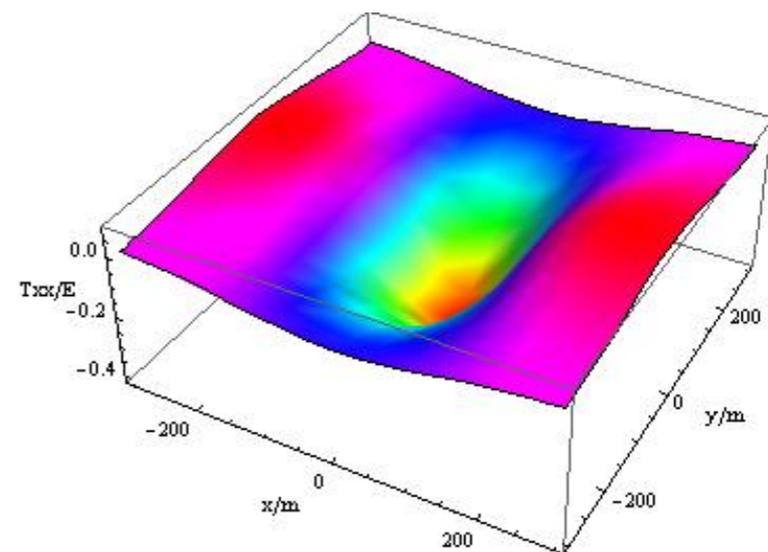
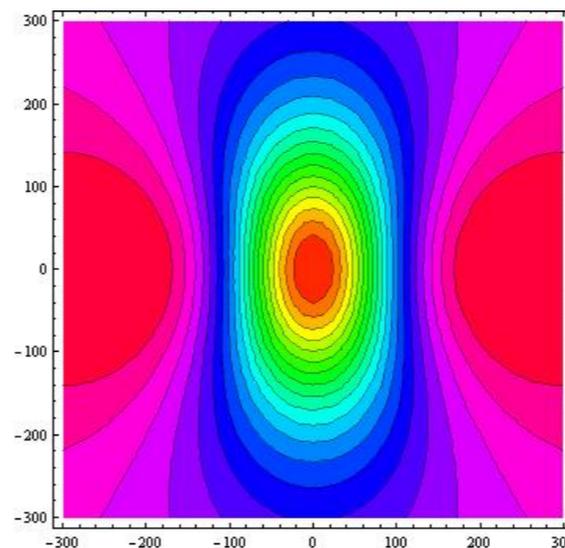
```
Table[(-1)^m * Integrate[-s * (Binomial[-s, m] + Binomial[s + 2, m]), {s, -1, 0}], {m, 0, 6}]
```

```
{1, -1,  $\frac{1}{12}$ , 0,  $-\frac{1}{240}$ ,  $-\frac{1}{240}$ ,  $-\frac{221}{60480}$ }
```

# 一、应用背景

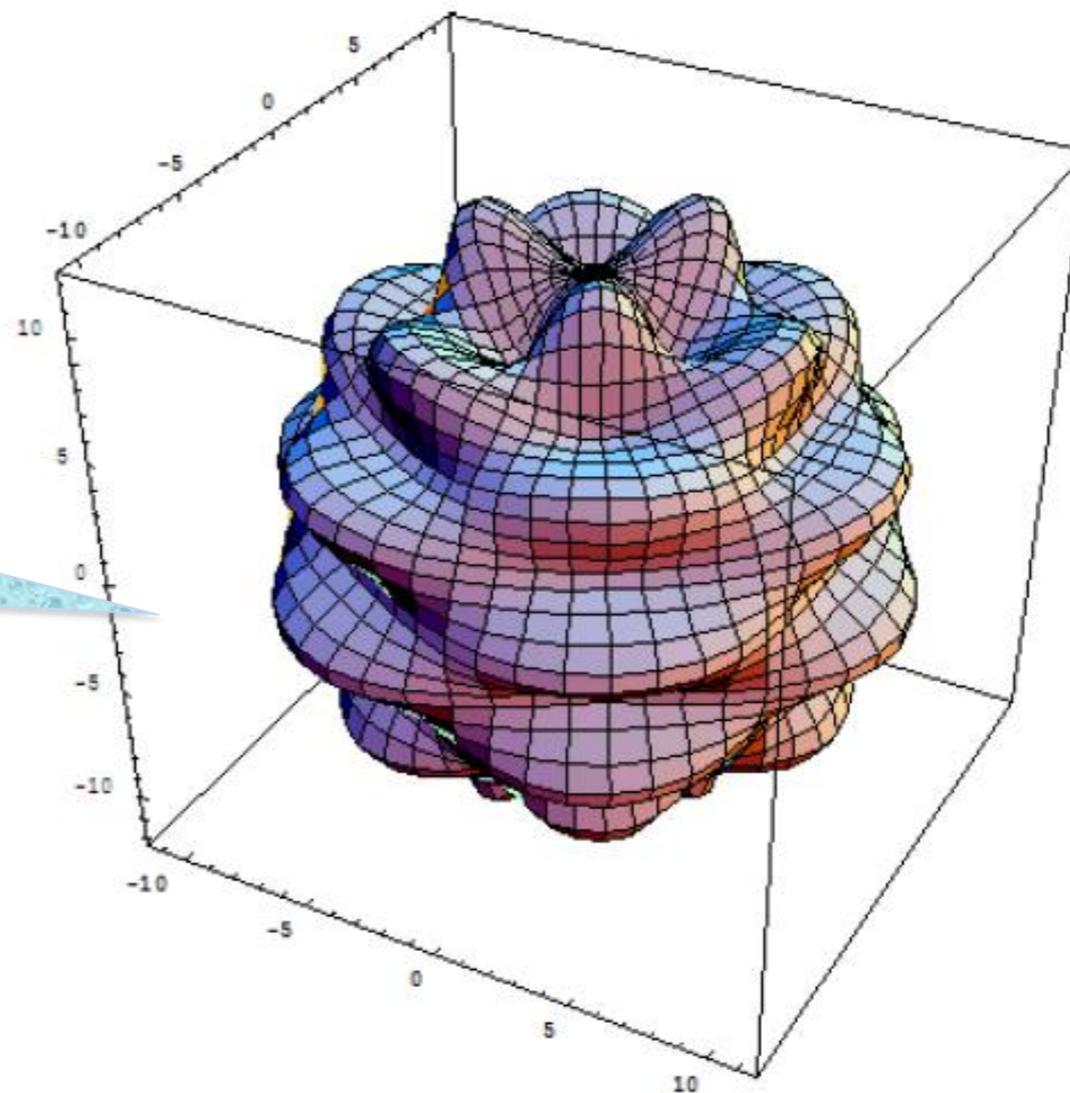


质体重力梯度空间分布



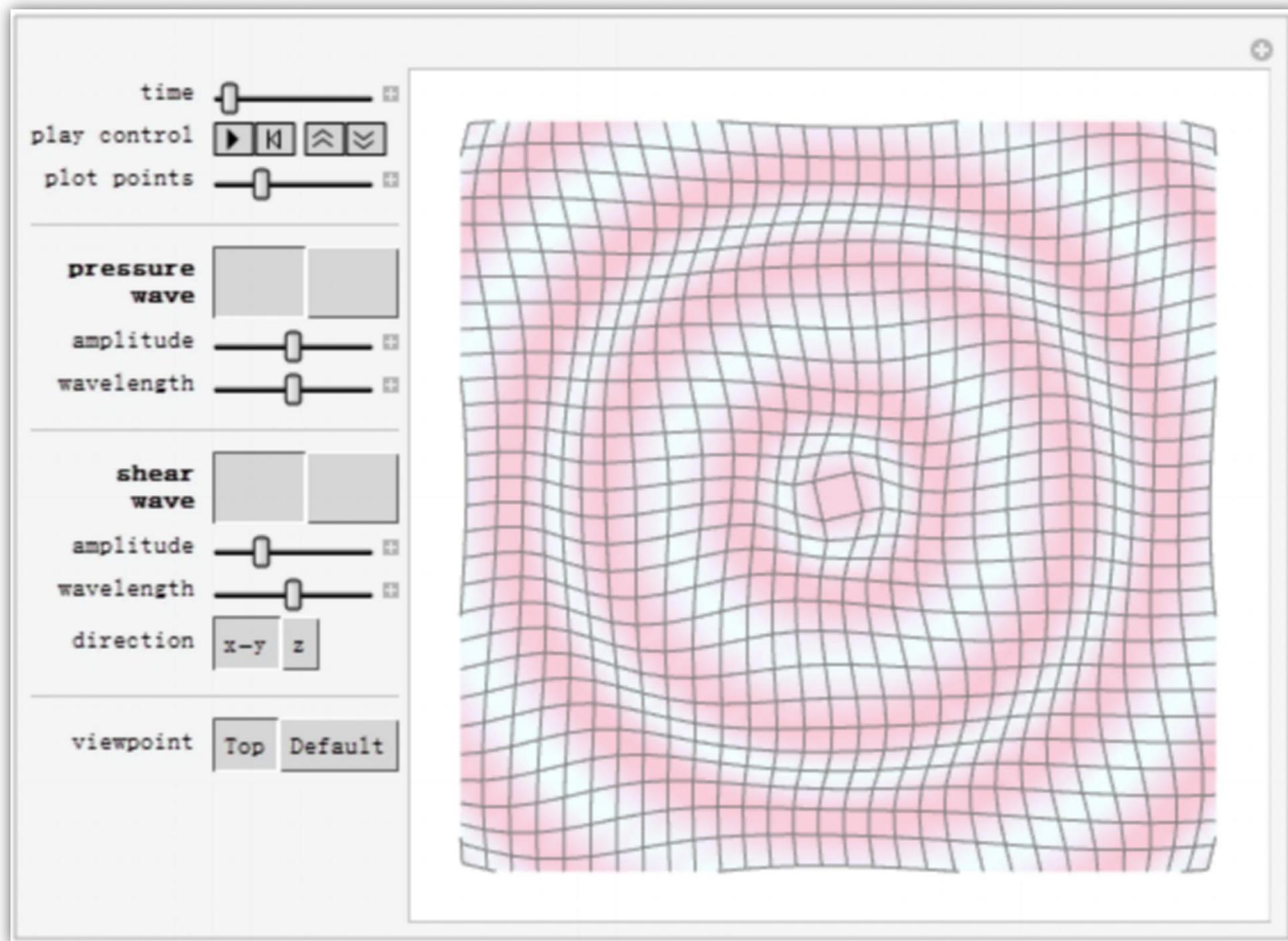
# 一、应用背景

球面调和  
函数变化





# 一、应用背景



压力剪切波动态变化

## 二、研究目标和研究内容

### 2.1 研究目标

充分利用计算机代数系统强大的符号推导和可视化分析能力

- 推导建立理论上更严密、形式上更简单、精度上更准确的大地测量符号化表达式。
- 揭示大地测量各类复杂数学模型和海量数据背后隐藏的规律。

实现大地测量学在一些具体数学分析问题上的突破和创新，进一步丰富和完善大地测量学的理论分析体系。

# 二、研究目标和研究内容

## 2.2 研究内容

### 1. 几何大地测量方向

- (1) 椭球面点线角面体符号化表达式
- (2) 椭球面到平面的投影及变换
- (3) 空间大地测量中的各类几何关系

### 2. 物理大地测量方向

- (1) 各类奇异积分精密符号表达式
- (2) 地球重力场椭球谐函数边值问题
- (3) 地球物理场导航与探测

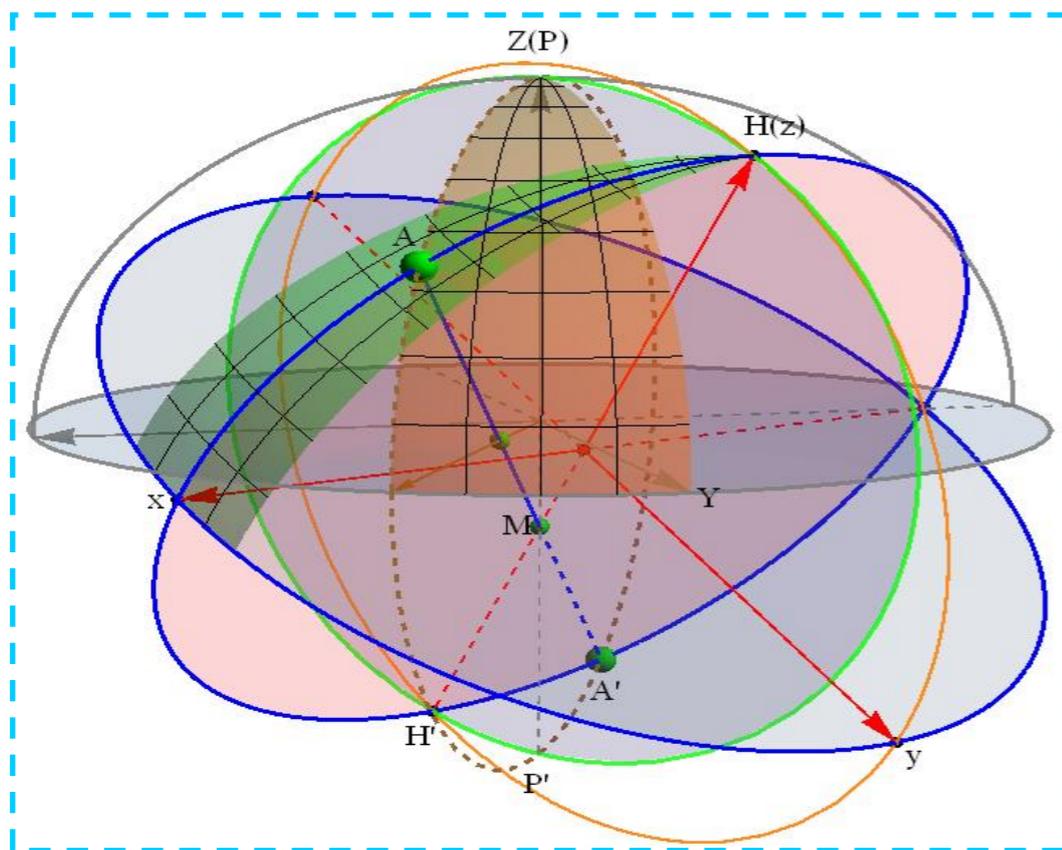
### 3. 卫星大地测量方向

- (1) 引力泛函和引力梯度符号表示
- (2) 卫星摄动理论
- (3) 卫星轨道微分方程数值解法

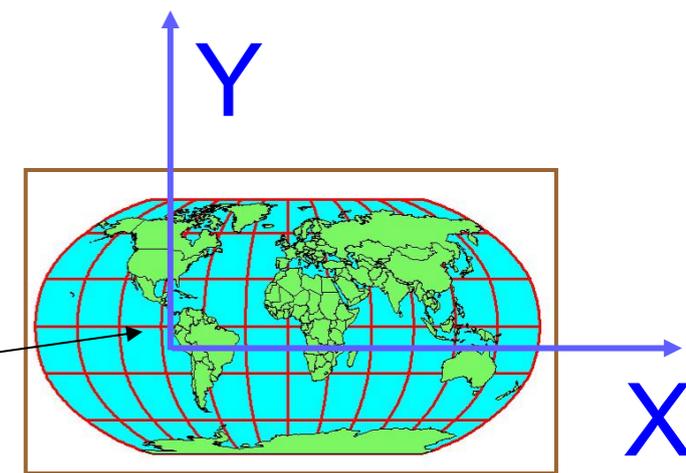
### 4. 地球动力学方向

- (1) 三轴分层地球自转
- (2) 地球自由振荡高精度探测
- (3) 更复杂的边界条件

# 核心研究内容（1）—几何大地测量方向



$(\phi_0, \lambda_0)$



$(x_0, y_0)$

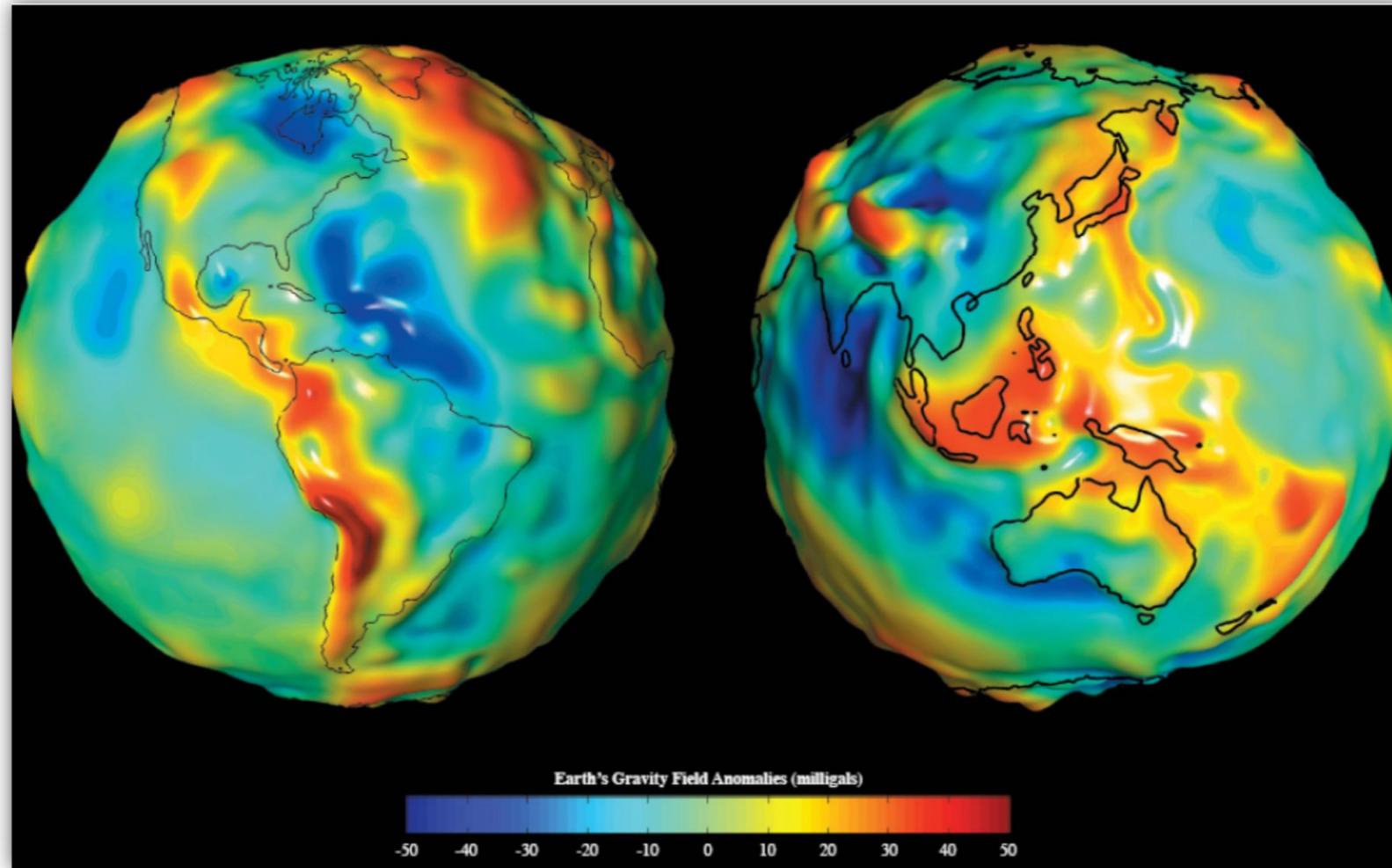
## ✓ 椭球面点线角面体符号化表达式

椭球面上和空间几何实体元素间的更严密的几何关系和符号化表示

## ✓ 椭球面到平面的投影及变换

导出各类投影正反解关于椭球偏心率的符号表达式，建立各类投影间变换的直接解算模型

# 核心研究内容（2）——物理大地测量方向



## ✓ 各类奇异积分精密符号表达式

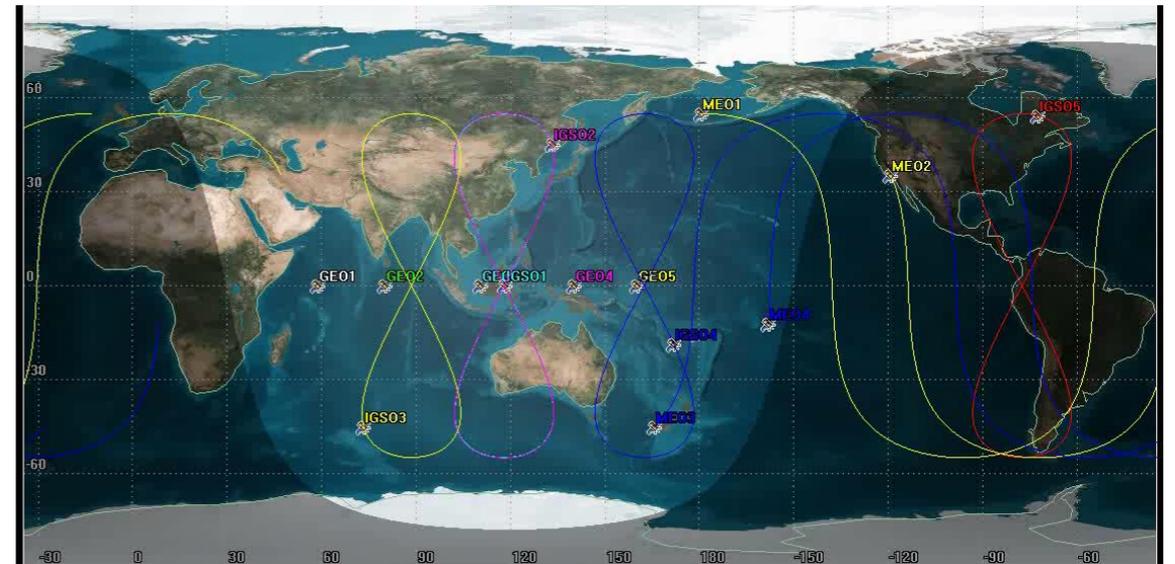
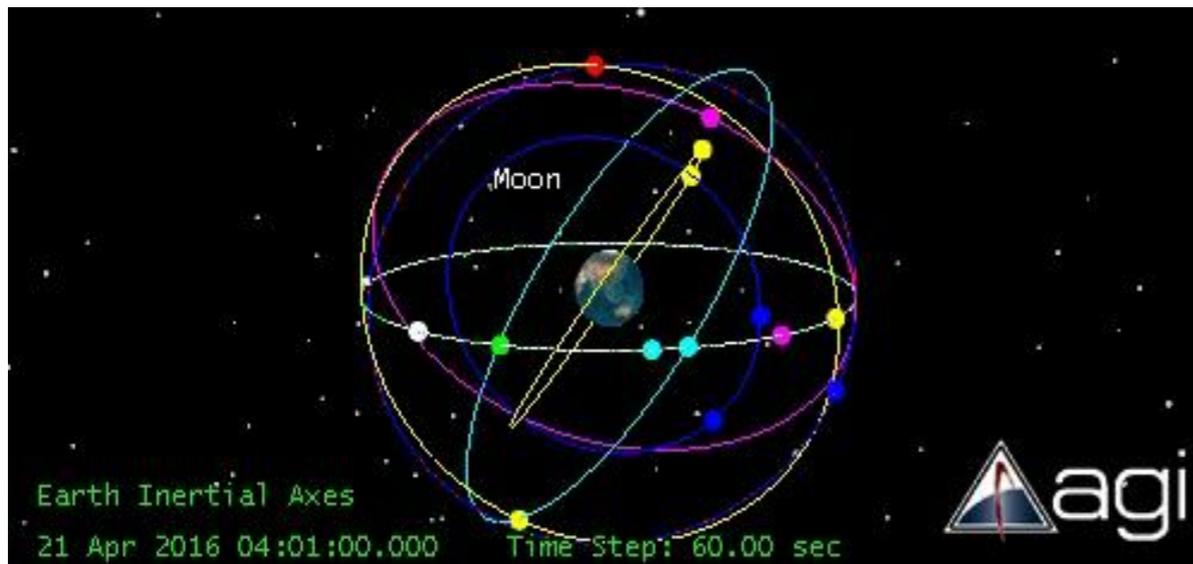
化与距离倒数有关的各类奇异积分非奇异，导出其符号表达式

## ✓ 地球重力场椭球谐函数边值问题解

椭球界面下边值问题的求解，导出各类积分问题的解析公式或级数解

## ✓ 地球物理场正反演算法符号化表示

# 核心研究内容（3）——卫星大地测量方向



## ✓ 卫星摄动理论

摄动函数、偏心率函数等特殊函数的高阶展开

## ✓ 轨道微分方程数值解法

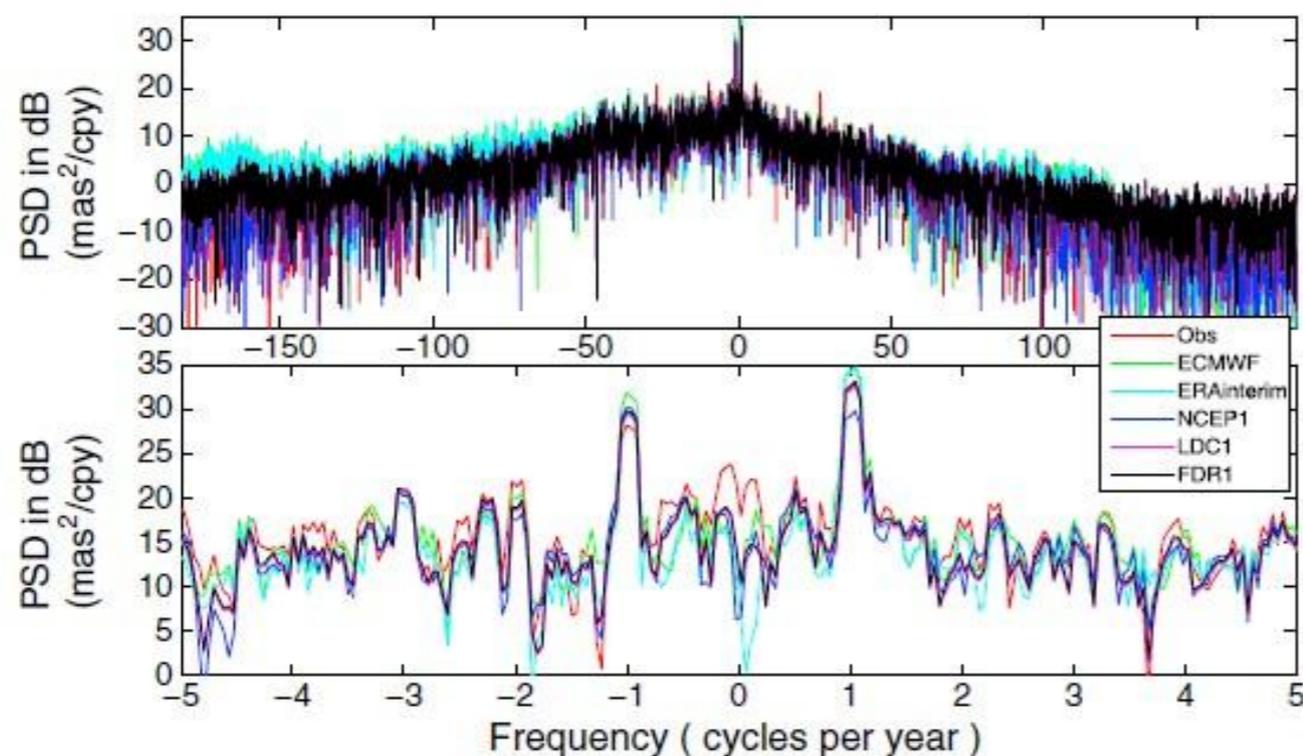
推导出新型的微分方程数值解公式，导出精度更高的数值解法

## ✓ 引力泛函和引力梯度符号表示

引力泛函和引力梯度张量在不同坐标系下的表示及变换公式

# 核心研究内容（4）—地球动力学方向

## 三轴地球自转理论



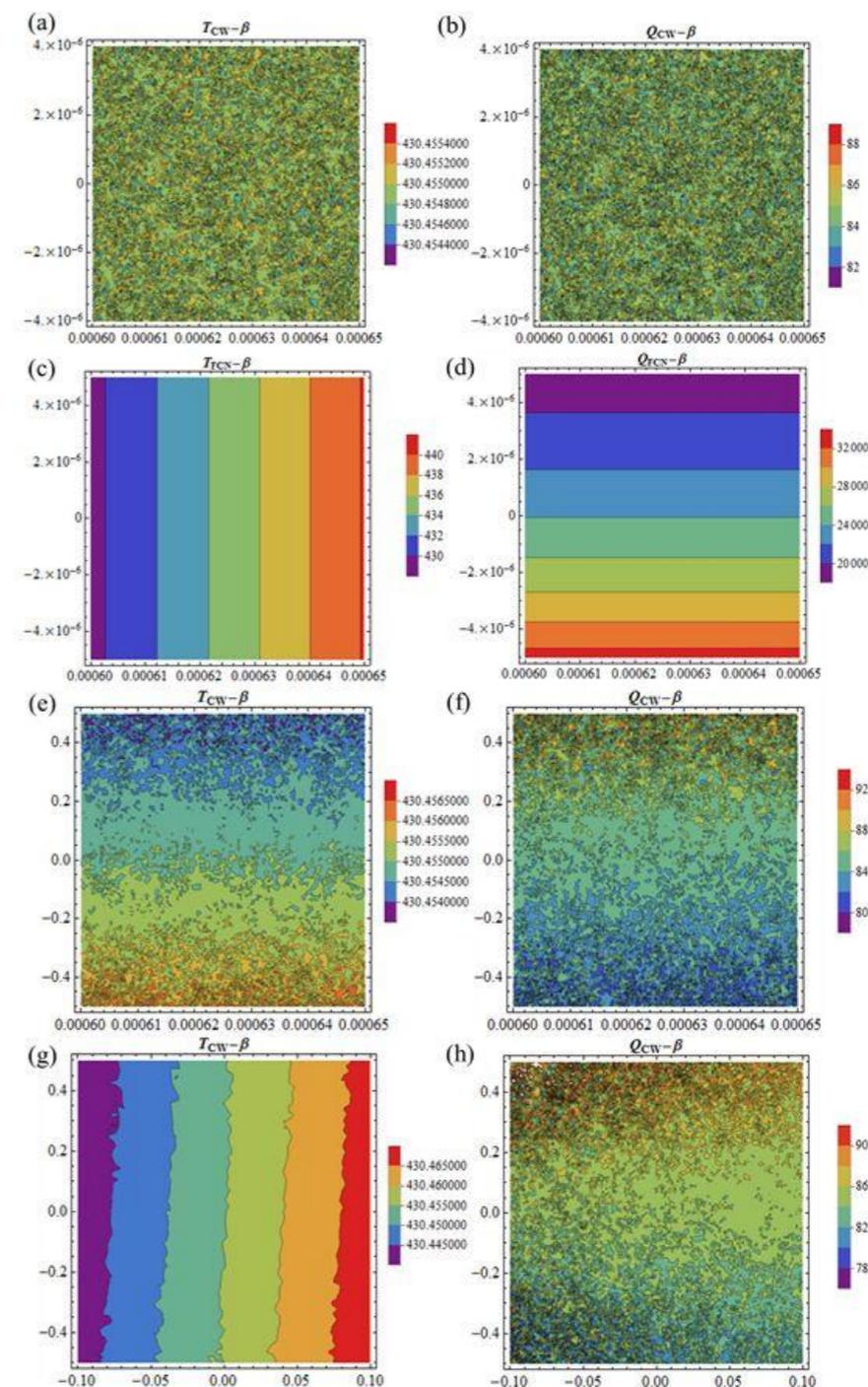
(Chen, Shen, et al. 2013a)

### ✓ 三轴分层地球自转模型

- 1) 顾及圈层耦合的三轴分层地球自转模型及分析解
- 2) 十年尺度日长变化机理研究

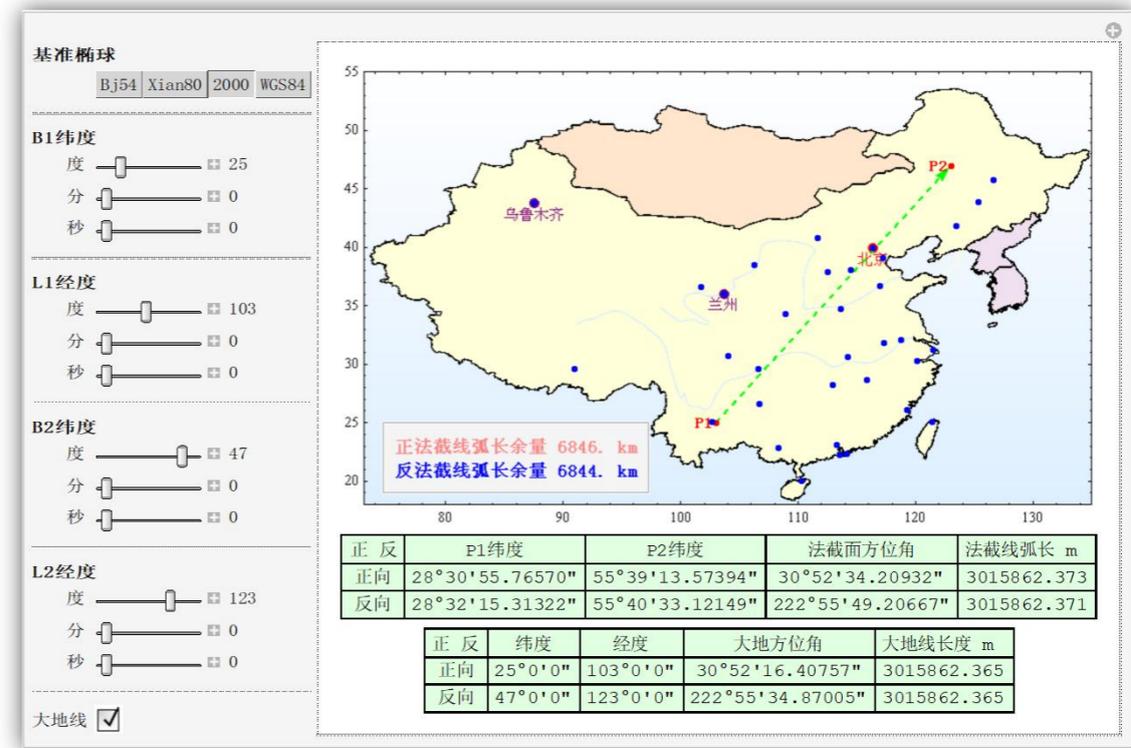
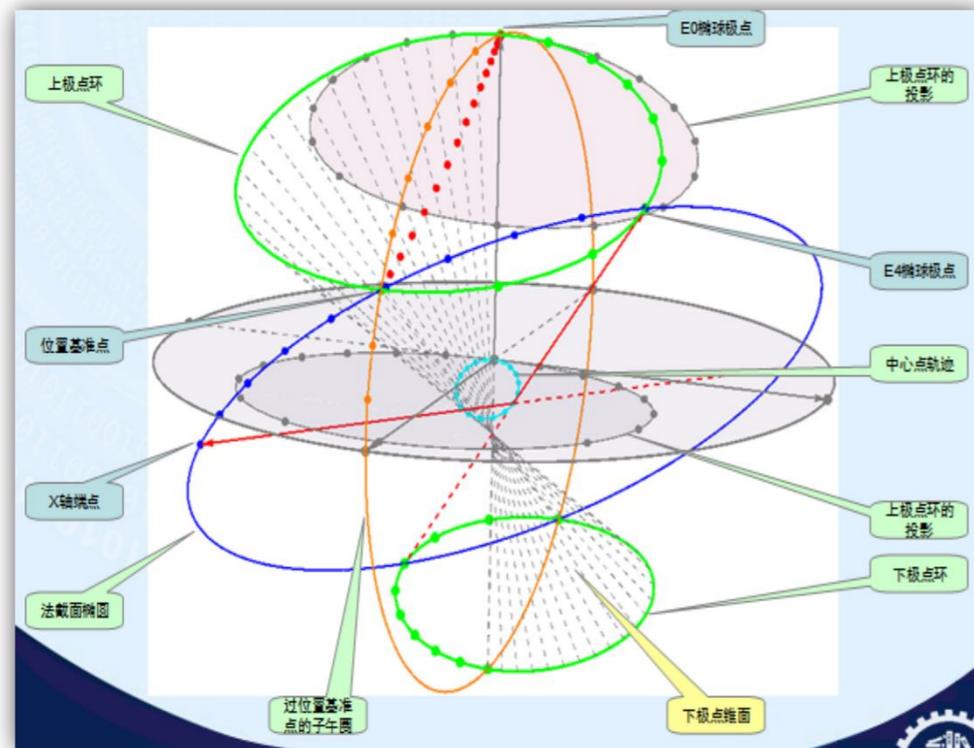
### ✓ 三轴分层地球自转激发函数

- 1) 基于物质迁移过程的三轴分层地球自转的有效激发函数；
- 2) Chandler 晃动机理研究



(Yang and Shen 2016)

# 核心研究内容（5）——大地测量计算机代数可视化

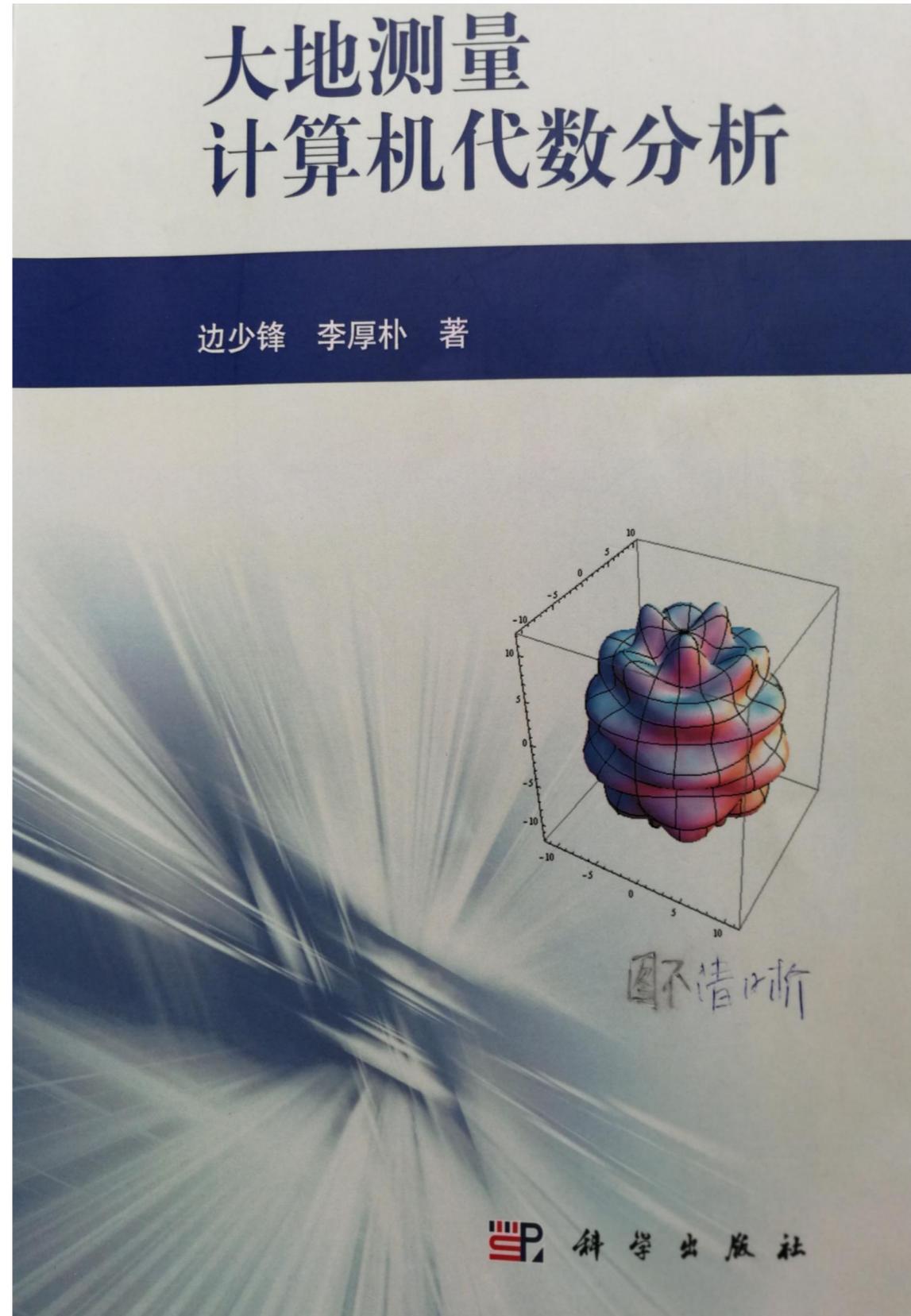


- ✓ 几何大地测量中空间点、线、面、体等元素的可视化表现手段和算法，椭球面投影到平面后经纬线变形规律；
- ✓ 物理大地测量中各类球谐函数、椭球谐函数的可视化表达；
- ✓ 卫星大地测量中的轨道摄动函数的动态描述；
- ✓ 三轴分层地球自转和地球自由振荡高精度探测可视化表达。

# 拟解决的关键科学问题

- (1) 根据问题的几何/物理/统计特性，分析建立所要解决数学分析问题的数学模型。
- (2) 依据建立的数学模型，将传统的面向人工推导的各类特殊函数和级数展开式，改造成适合计算机代数系统推导的数学形式。
- (3) 对人工推导需要极大忍耐力的摄动分析、倾角函数、偏心率函数，需要解决各下标变量的逻辑分析次序。

# 三、新书内容推介



# 第一章 绪 论.....

§ 1.1 计算机代数.....

§ 1.2 计算机代数系统.....

1.2.1 Mathematica 计算机代数系统.....

1.2.2 Maple 计算机代数系统.....

1.2.3 Mathcad 计算机代数系统.....

1.2.4 MATLAB 矩阵计算与代数系统.....

§ 1.3 大地测量数学分析研究现状.....

1.3.1 椭球大地测量数学分析研究方面.....

1.3.2 物理大地测量数学分析研究方面.....

1.3.3 卫星大地测量数学分析研究方面.....

1.3.4 研究现状小结.....

# Mathematica 计算机代数系统

Wolfram Language Documentation Center - Wolfram Mathematica 10.4

文件 (F) 编辑 (E) 插入 (I) 格式 (R) 单元 (C) 图形 (G) 计算 (V) 面板 (P) 窗口 (W) 帮助 (H)

Wolfram Language & System | Documentation Center

Core Language & Structure $f[x]$	Data Manipulation & Analysis	Visualization & Graphics	Symbolic & Numeric Computation $x^2+y$	Strings & Text <i>a to see and by large of among they should on the</i>
Graphs & Networks	Images	Geometry	Sound	Time-Related Computation
Geographic Data & Computation	Scientific and Medical Data & Computation	Engineering Data & Computation	Financial Data & Computation	Social, Cultural & Linguistic Data
Higher Mathematical Computation $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k}$	Documents & Presentation	User Interface Construction	System Operation & Setup	External Interfaces & Connections
Cloud & Deployment				

[Intro for Programmers >](#) [Introductory Book >](#) [New Features >](#) [Index of Functions >](#) [Standard Extra Packages >](#) [Add-ons and Packages >](#)

# Maple 计算机代数系统

The screenshot displays the Maple 11 software interface. The main window shows a plot of the function  $x^2 \sin(x)$  over the interval  $[-3\pi, 3\pi]$ . The plot is titled "Plot of  $x^2 \sin(x)$ " and shows a red curve with a local minimum at  $x \approx \frac{6\pi}{4}$ . The plot is labeled "Curve 1".

The interface includes a menu bar (File, Edit, View, Insert, Format, Table, Drawing, Plot, Spreadsheet, Tools, Window, Help) and a toolbar with various icons. The left sidebar contains a "Favorites" panel with mathematical symbols and units, and an "Expression" panel with mathematical functions. The right sidebar shows a context menu with options such as Cut, Copy, Paste, Numeric Formatting, Apply a Command, Approximate, Assign to a Name, Collect, Combine, Differentiate, Evaluate at a Point, Expand, Factor, Integrate, Series, Simplify, Solve, Complex Maps, Constructions, Conversions, Integer Functions, Integral Transforms, Language Conversions, Optimization, Plots, Simplifications, and Units. The "Integral Transforms" option is highlighted, and a sub-menu is visible with options like Fourier Cosine Transform, Fourier Sine Transform, Fourier Transform, Hilbert Transform, Inverse Fourier Transform, Inverse Hilbert Transform, Inverse Laplace Transform, and Laplace Transform.

The status bar at the bottom indicates "Ready" and "Memory: 4.93M Time: 0.54s Math Mode".

§ 2.1	子午线弧长正解问题 .....
§ 2.2	参考椭球上梯形图幅面积计算 .....
§ 2.3	幂级数展开法解子午线弧长反问题 .....
2.2.1	类纬度变量 .....
2.2.2	微分方程展开为变量 $x$ 的正弦的幂级数 .....
2.2.3	逐项积分得子午线弧长反解展开式 .....
§ 2.4	两点 HERMITE 法解子午线弧长反问题 .....
2.4.1	基本思路分析 .....
2.4.2	计算机代数系统下的进一步展开 .....

**Series**[(1 - e<sup>2</sup> \* Sin[B]<sup>2</sup>)<sup>-3/2</sup>, {e, 0, 10}] (将被积函数在 e = 0 处展开为 e 的幂级数形  
e<sup>10</sup>)

$$1 + \frac{3}{2} \text{Sin}[B]^2 e^2 + \frac{15}{8} \text{Sin}[B]^4 e^4 + \frac{35}{16} \text{Sin}[B]^6 e^6 + \frac{315}{128} \text{Sin}[B]^8 e^8 + \frac{693}{256} \text{Sin}[B]^{10} e^{10} + O[e]^{11}$$

**X0 = Integrate**[% , B] (对展开式逐项积分, %代表上一步的计算结果)

$$B + \frac{3}{4} (B - \text{Cos}[B] \text{Sin}[B]) e^2 + \frac{15}{256} (12B - 8 \text{Sin}[2B] + \text{Sin}[4B]) e^4 -$$

$$\frac{35 (-60B + 45 \text{Sin}[2B] - 9 \text{Sin}[4B] + \text{Sin}[6B]) e^6}{3072} + \frac{105 (840B - 672 \text{Sin}[2B] + 168 \text{Sin}[4B] - 32 \text{Sin}[6B] + 3 \text{Sin}[8B]) e^8}{131072} +$$

$$\frac{1}{2621440} 693 (2520B - 2100 \text{Sin}[2B] + 600 \text{Sin}[4B] - 150 \text{Sin}[6B] + 25 \text{Sin}[8B] - 2 \text{Sin}[10B]) e^{10} + O[e]^{11}$$

**X0 = TrigReduce**[Normal[X0]] (化为三角函数的倍角形式)

$$\frac{1}{7864320} (7864320B + 5898240B e^2 + 5529600B e^4 + 5376000B e^6 + 5292000B e^8 + 5239080B e^{10} -$$

$$2949120 e^2 \text{Sin}[2B] - 3686400 e^4 \text{Sin}[2B] - 4032000 e^6 \text{Sin}[2B] - 4233600 e^8 \text{Sin}[2B] - 4365900 e^{10} \text{Sin}[2B] +$$

$$460800 e^4 \text{Sin}[4B] + 806400 e^6 \text{Sin}[4B] + 1058400 e^8 \text{Sin}[4B] + 1247400 e^{10} \text{Sin}[4B] - 89600 e^6 \text{Sin}[6B] -$$

$$201600 e^8 \text{Sin}[6B] - 311850 e^{10} \text{Sin}[6B] + 18900 e^8 \text{Sin}[8B] + 51975 e^{10} \text{Sin}[8B] - 4158 e^{10} \text{Sin}[10B])$$

§ 2.5	三点 HERMITE 法解子午线弧长反问题 .....
2.5.1	中点 $x=\pi/4$ 、 $B(x=\pi/4)$ 及其导数的确定 .....
2.5.2	利用插值条件确定待定系数 .....
§ 2.6	LAGRANGE 级数法解子午线弧长反问题 .....
2.6.1	Lagrange 级数 .....
2.6.2	基于 Lagrange 级数法的子午线弧长反解展开式确定 ...
§ 2.7	子午线弧长反解展开式的精度分析 .....
§ 2.8	大地纬度、地心纬度和归化纬度间的关系式 .....
2.8.1	大地纬度、地心纬度和归化纬度间的严密式 .....
2.8.2	大地纬度、地心纬度和归化纬度间的展开式 .....
§ 2.9	大地线的参数方程 .....
§ 2.10	大地线 LEGENDRE 级数展开, GAUSS 平均引数展开 .....
§ 2.11	BESSEL 大地问题解算 .....
§ 2.12	法截线方位角与 BESSEL 大地问题反解直接法 .....
§ 2.13	大椭圆法解大地问题 .....

§ 5.1	柱体积分, 层间改正 .....
5-1.1	柱体积分 .....
5-1.2	层间改正 .....
§ 5.2	矩形棱柱引力和引力位 .....
5.2.1	矩形棱柱的引力 .....
5.2.2	矩形棱柱的引力位 .....
§ 5.3	球冠和球层冠引力位及引力 .....
5.3.1	球冠引力位和引力 .....
5.3.2	球层冠引力位和引力 .....
§ 5.4	均质旋转椭球体在内部的引力和引力位 .....
5.4.1	基本积分式的导出 .....
5.4.2	用计算机代数系统计算与旋转椭球引力有关的积分 .....
5.4.3	实变函数积分要通过复变函数得到 .....
§ 5.5	地形校正中央区积分 .....
5.5.1	矩形域上的 8 分片线性插值地形校正积分 .....
5.5.2	菱形域上的 4 分片线性插值地形校正积分 .....
§ 5.6	地球重力场泛函中央区奇异积分 .....

5.8.1	扰动位二阶项的直角坐标表示 .....
5.8.2	扰动引力二阶项的直角坐标表示 .....
5.8.3	扰动位二阶项梯度张量的直角坐标表示 .....
§ 5.9	绘全球或局部大地水准面和重力异常等值线图 .....
5.9.1	绘全球大地水准面等值线图 .....
5.9.2	绘全球重力异常等值线图 .....

## 5.9.2 绘全球重力异常等值线图

类似地，可以绘出展至 10 阶的全球重力异常图，以 mGal 为单位（ $1\text{mGal}=10^{-5}\text{m/s}^2$ ），如图 5-10 所示。

```
ContourPlot[ $\sum_{n=2}^{10} \sum_{m=0}^n \sqrt{(2n+1)(2-\text{KroneckerDelta}[0,m]) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (n-1)}$   
  {Cnm[[n-1, m+1]] Cos[m * λ *  $\frac{\pi}{180}$ ] + Snm[[n-1, m+1]] Sin[m * λ *  $\frac{\pi}{180}$ ]}  
  LegendreP[n, m, Sin[φ *  $\frac{\pi}{180}$ ]], {λ, 0, 360}, {φ, -90, 90}, AspectRatio -> Automatic,  
  PlotPoints -> 50, Contours -> 20, ContourLabels -> All, FrameLabel -> {"λ/(°)", "φ/(°)"}]
```

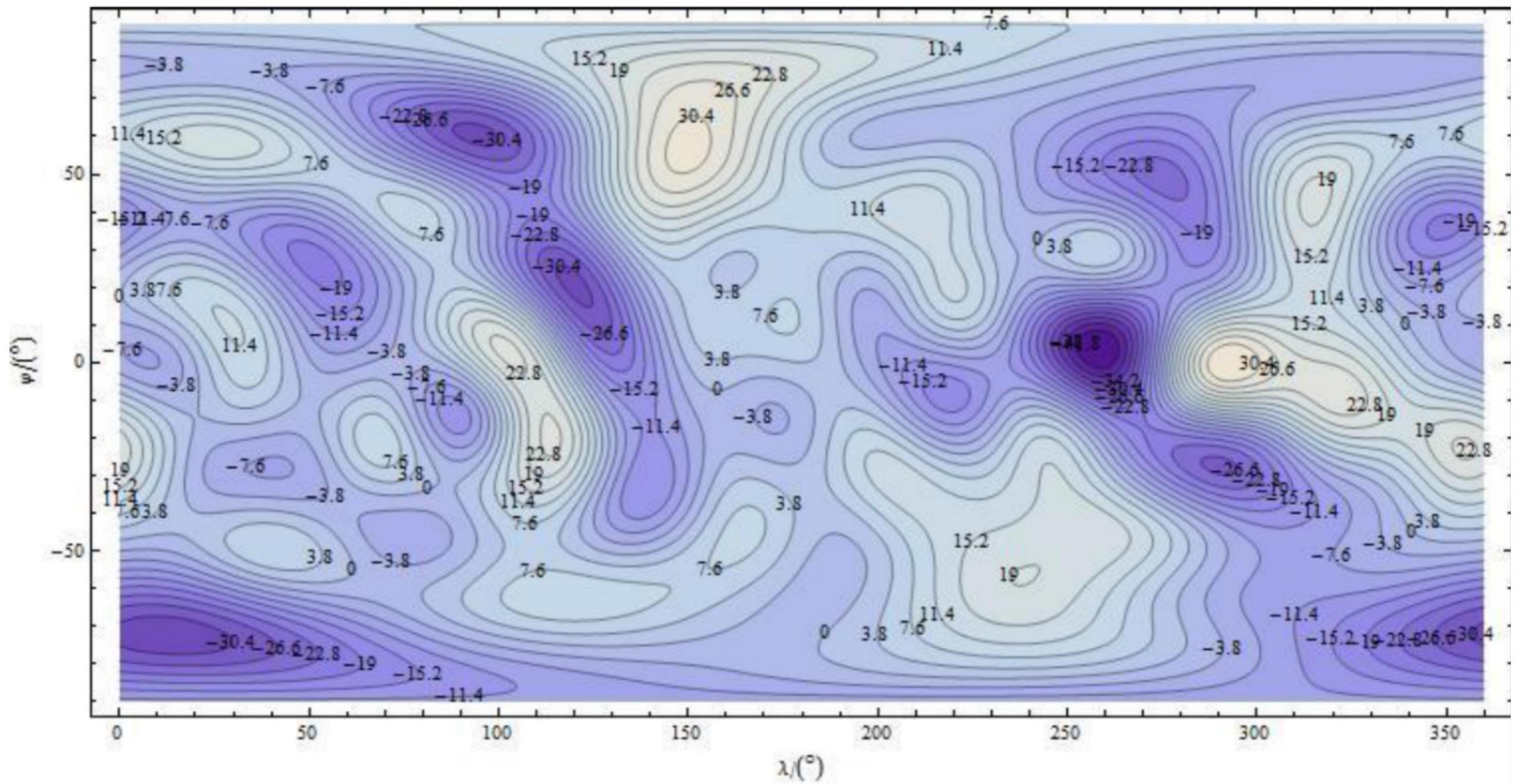


图 5-10 展至 10 阶的全球重力异常等值线图 (单位: mGal)

```
SphericalPlot3D[Re[10 + 4 * SphericalHarmonicY[12, 3,  $\theta$ ,  $\lambda$ ]], { $\theta$ , 0, Pi},  
{ $\lambda$ , 0, 2 * Pi}]
```

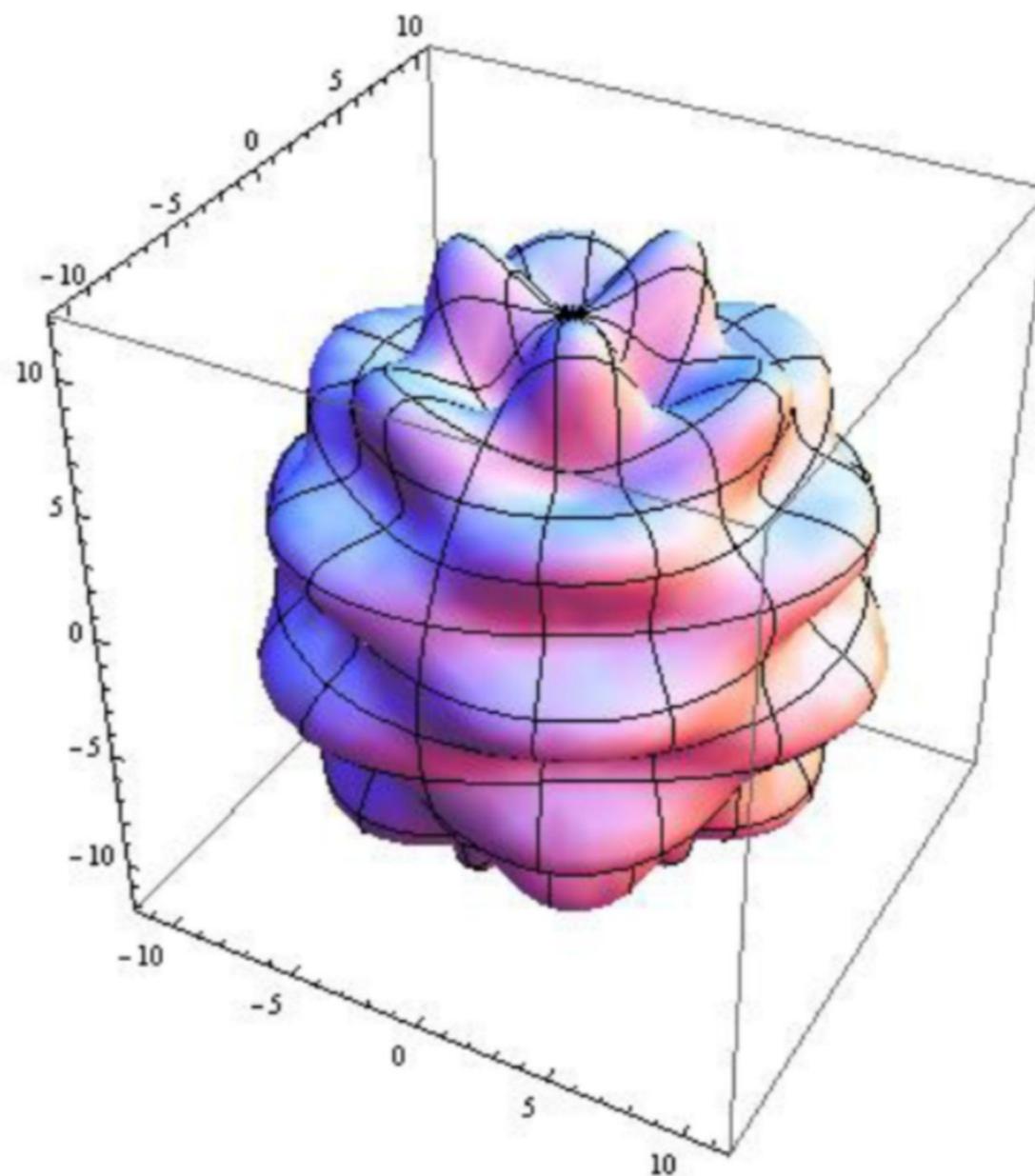


图 5-12 球面调和函数( $n = 12, m = 3$ )变化示意图

§ 6.1 椭圆运动的级数展开 .....	
6.1.1 Bessel 函数 .....	
6.1.2 偏近点角、真近点角和平近点角几何关系 .....	
6.1.3 偏近点角的 Fourier 级数展开 .....	
6.1.4 真近点角的 Fourier 级数展开 .....	
6.1.5 $\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos pf$ 和 $\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin pf$ 的展开, 汉申函数 .....	

6.2.1 偏近点角与平近点角差值关于平近点角的极值符号表达式。  
答。

6.2.2 真近点角与偏近点角差值关于平近点角的极值符号表达式。  
答。

6.2.3 真近点角与偏近点角差值关于偏近点角的极值符号表达式。  
答。

6.2.4 真近点角与平近点角差值关于平近点角的极值符号表达式

$$\frac{d(f-E)}{dM} = \left( \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1-e}{1-e \cos E} - 1 \right) \frac{1}{1-e \cos E} = 0$$

令式 (6-24) 等于零, 略去推导得:

$$\cos E = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}$$

$E$  可为第一象限角也可为第四象限角。当  $E$  为第一象限角时有:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \arccos \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e} - \sqrt{2\sqrt{1 - e^2} - 2(1 - e^2)} \\ E = \arccos \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e} \\ f = 2 \arctan \sqrt[4]{\frac{1+e}{1-e}} \end{array} \right.$$

$$\text{Series}\left[-\text{ArcCos}\left[\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}\right]+\sqrt{2\sqrt{1-e^2}-2(1-e^2)},\{e,0,8\}\right]$$

(\*将极小值点  $M$  展成关于  $e$  的幂级数形式\*)

$$-\frac{\pi}{2}+\frac{3e}{2}+\frac{e^3}{48}+\frac{13e^5}{1280}+\frac{89e^7}{14336}+O[e]^9$$

$$\text{Series}\left[-2\text{ArcTan}\left[\sqrt[4]{\frac{1+e}{1-e}}\right]+\text{ArcCos}\left[\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}\right],\{e,0,8\}\right]$$

(\*将  $f-E$  极小值展成关于  $e$  的幂级数形式\*)

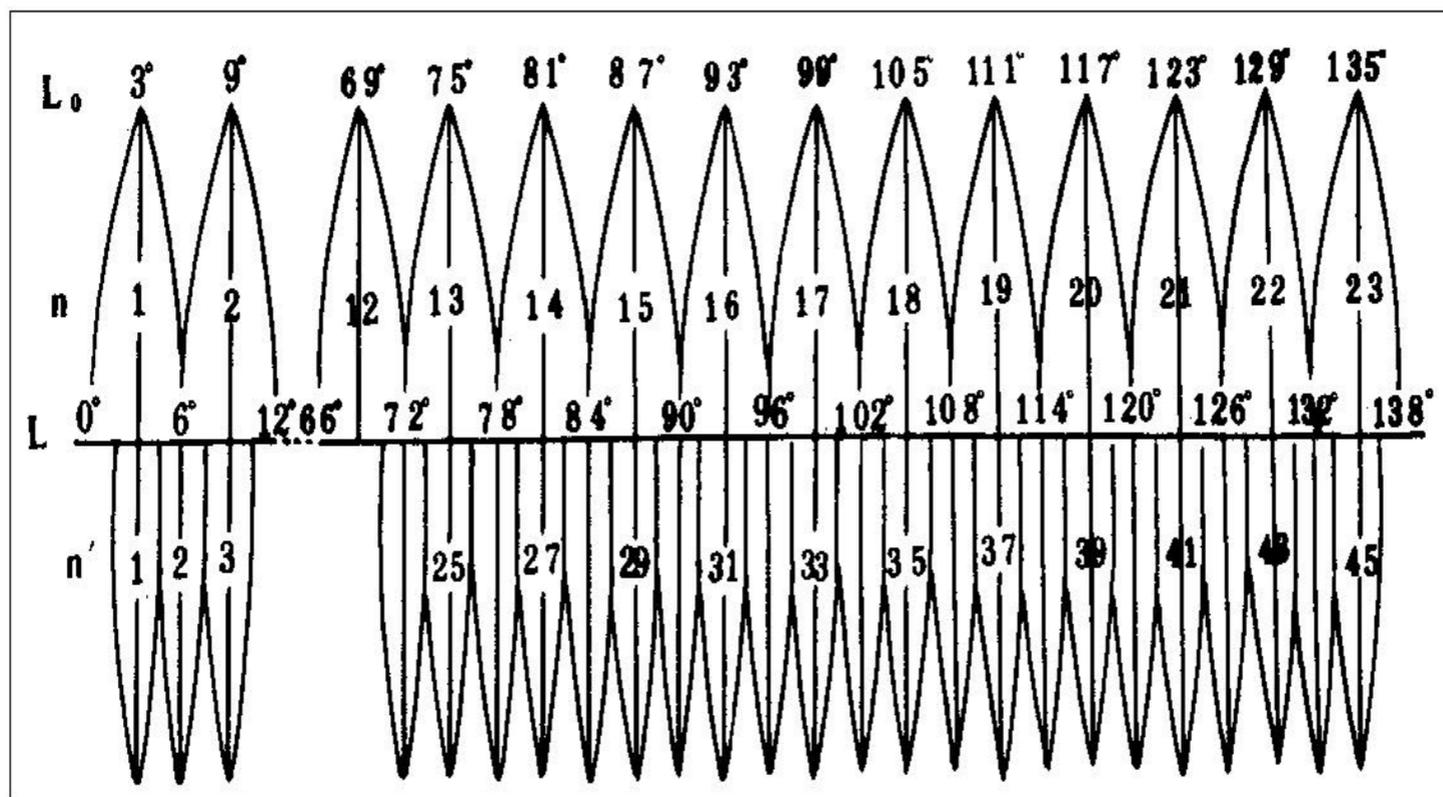
$$-e-\frac{7e^3}{24}-\frac{103e^5}{640}-\frac{775e^7}{7168}+O[e]^9$$

6.3.1	三角函数倍角形式化为幂形式.....
6.3.2	三角函数幂形式化为倍角形式.....
6.3.3	连带 Legendre 函数转化为三角多项式.....
§ 6.4	一些函数的平均值.....
6.4.1	一类含有三角函数特殊积分的计算.....
6.4.2	平均值 $\overline{\cos qf}$ 确定.....
§ 6.5	一阶项摄动, $J_2$ 项.....
6.4.1	部分轨道根数一阶项摄动.....
6.4.2	部分轨道根数一阶长周期项摄动.....
§ 6.6	KAULA 理论与摄动函数展开.....
§ 6.7	倾角函数确定.....
§ 6.8	偏心率函数的确定.....
6.9	改型 LAGRANGE 线性解中的偏心率函数.....
6.10	微分方程数值解法.....

# 几何大地测量

## 工作三：高斯投影复变函数表示

针对传统高斯投影表达式复杂冗长，计算繁琐且需进行分带处理的缺点，项目引进复变函数，通过解析开拓，将高斯投影从实数域拓展到复数域，创造性的发展了高斯投影理论与技术。



与传统高斯投影相比高斯投影复变形式不受带宽影响

相关成果收录于《高斯投影的复变函数表示》

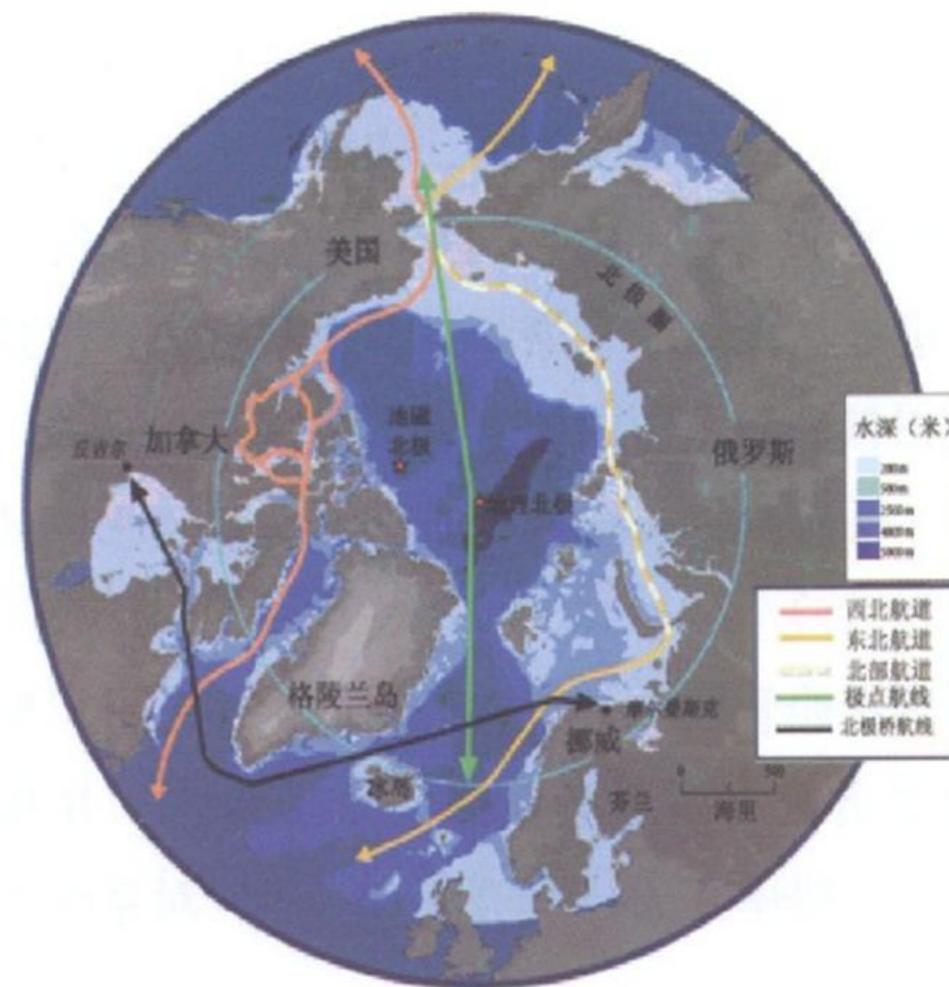
# 几何大地测量

## 高斯投影复变函数表示

在高斯投影复变函数理论的基础上，进一步建立极区高斯投影的复变函数表示，一定程度上丰富和发展地图投影理论

### □高斯投影统一公式优势：

- 无分带，可绘制出极区 $360^\circ$ 连续投影图
- 陆海图统一，更好的体现极区陆海位置关系
- 解决传统投影公式极区奇异问题

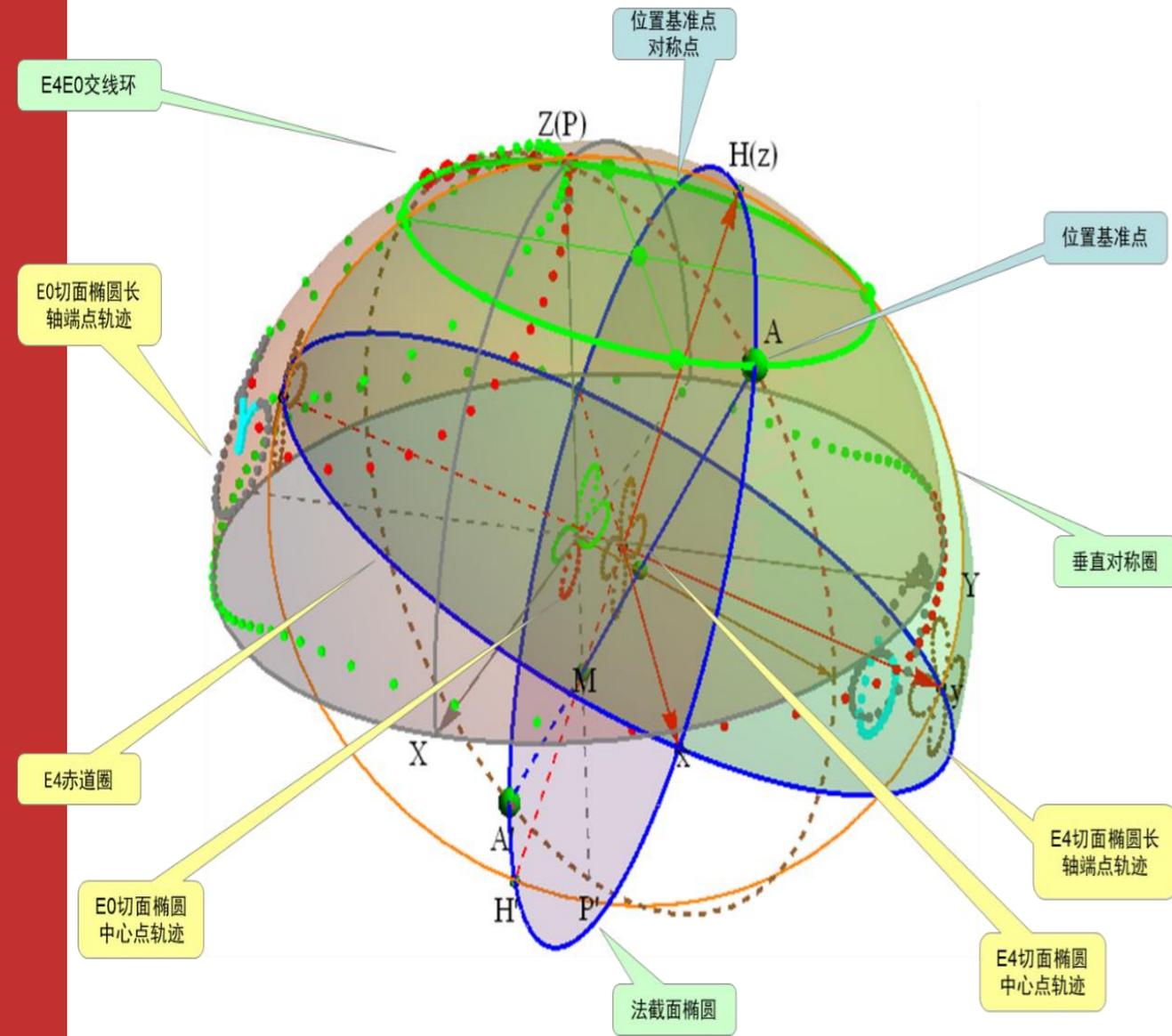


北极地区航线示意图

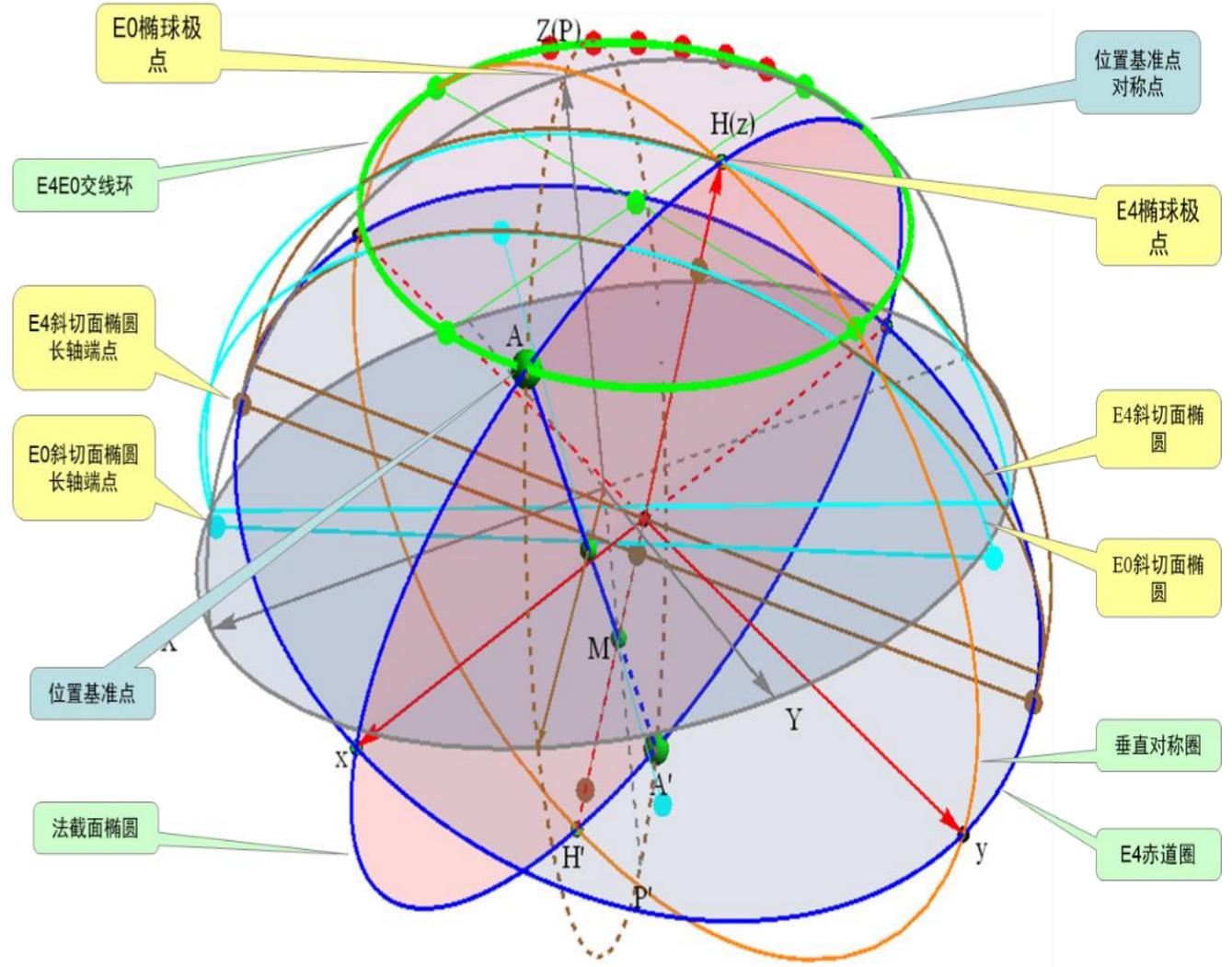
相关成果收录于《高斯投影的复变函数表示》

# 大地测量计算机代数可视化

## 工作一：法截面子午线椭球高斯投影计算机代数可视化



法截面正切面椭圆特征点轨迹

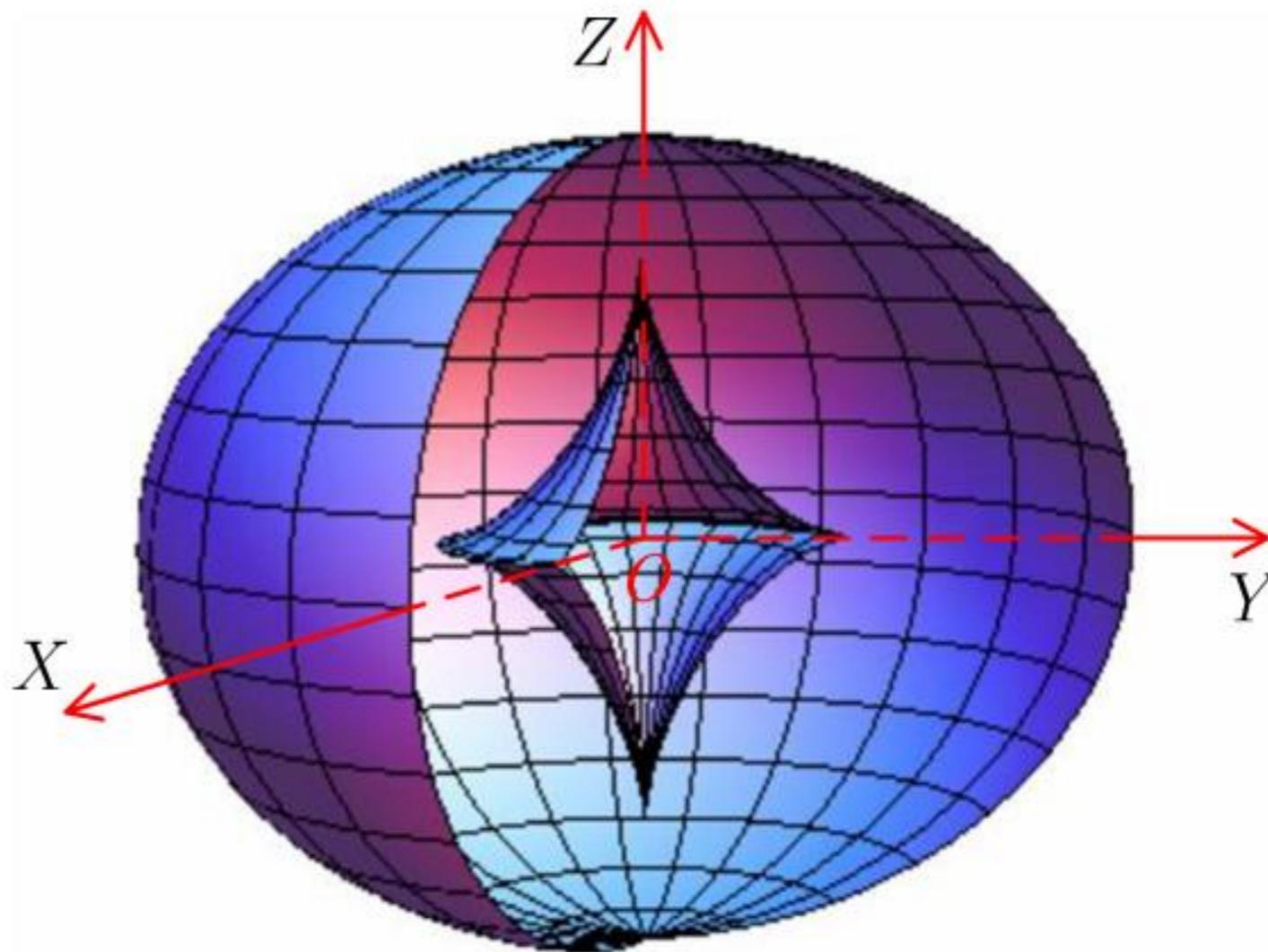
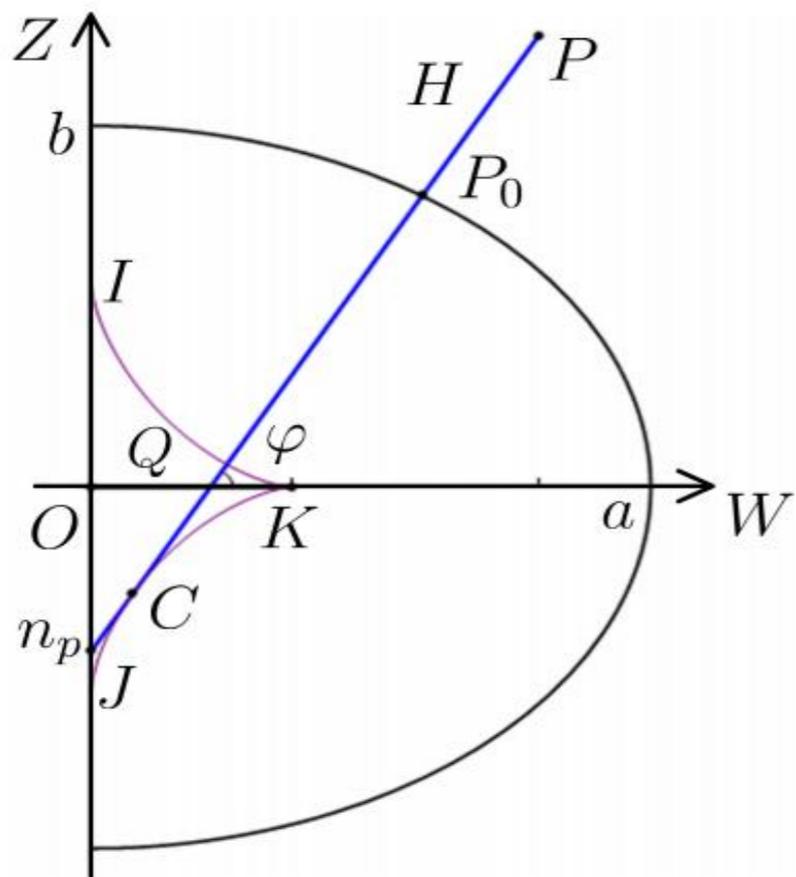


法截面斜切面

# 大地测量计算机代数可视化

## 工作二：旋转椭球空间渐屈面计算机代数可视化

- 曲率中心的轨迹构成曲线的渐近线，过左一图中I、J、K点的星形线为椭圆的渐屈线，利用计算机代数系统，可完成旋转椭球及其渐屈线轨迹的三维可视化建模，



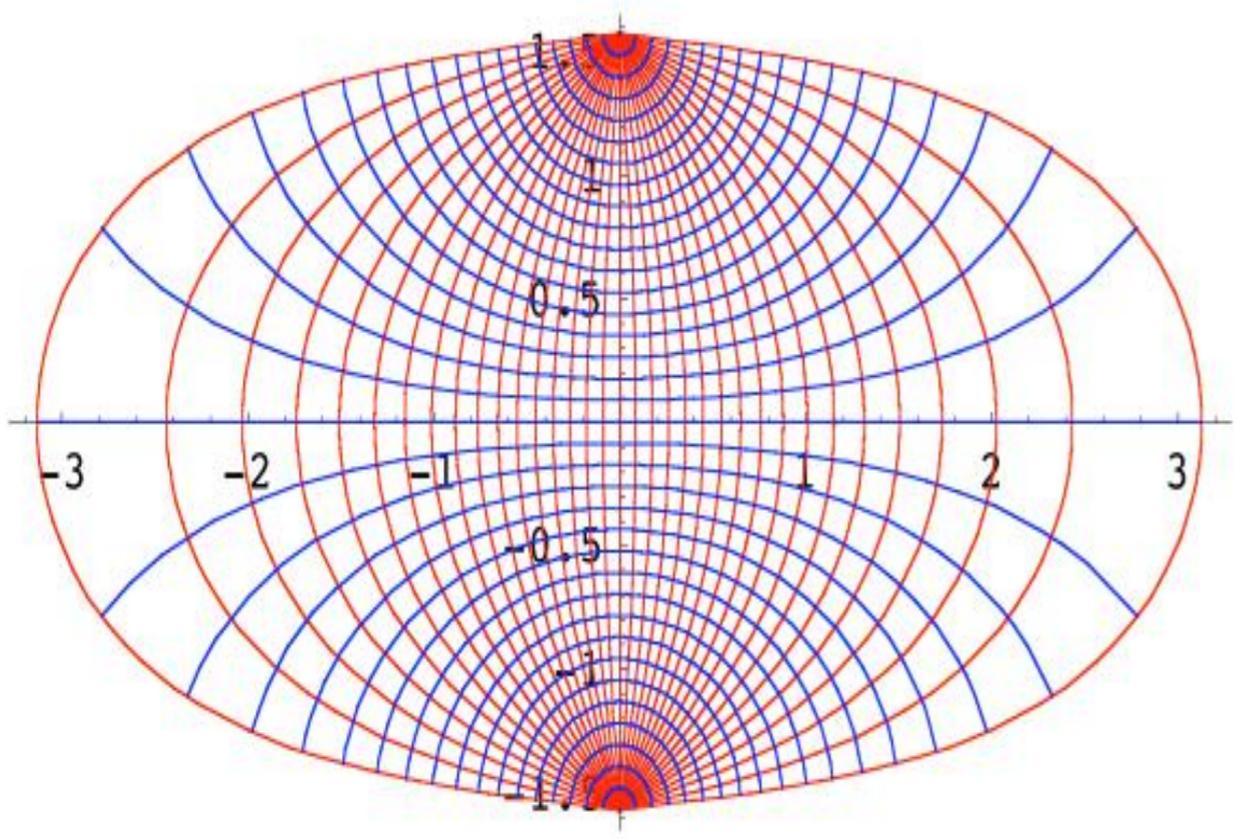
子午线曲率中心及渐屈线

旋转椭球渐屈线轨迹

# 2.5 大地测量计算机代数可视化

## 工作三：地图投影计算机代数可视化

利用计算机代数复变函数绘图功能，可以非常方便地将地图投影坐标曲线可视化



高斯投影复变函数绘图

基准椭球  
Bj54 Xian80 2000 WGS84

B1纬度  
度 25  
分 0  
秒 0

L1经度  
度 103  
分 0  
秒 0

B2纬度  
度 47  
分 0  
秒 0

L2经度  
度 123  
分 0  
秒 0

大地线

正 反	P1纬度	P2纬度	法截面方位角	法截线弧长 m
正向	28°30'55.76570"	55°39'13.57394"	30°52'34.20932"	3015862.373
反向	28°32'15.31322"	55°40'33.12149"	222°55'49.20667"	3015862.371

正 反	纬度	经度	大地方位角	大地线长度 m
正向	25°0'0"	103°0'0"	30°52'16.40757"	3015862.365
反向	47°0'0"	123°0'0"	222°55'34.87005"	3015862.365

斜轴高斯投影变形动态可视化

# 学术交流



## 四、特色与创新之处

### 4.1 特色

1. 突出大地测量学的“**数学分析**”过程和背景，强化大地测量**可视化**，提升大地测量表现力。

2. 独树一帜的**符号运算**，有别于传统的数值计算，导出的公式具有**普适性**。

3. 可以考虑更多的因素和更高的阶数，符合大地测量强烈的高精度需求背景。

汇报结束，  
敬请各位同行  
批评指正！